2. cvičení – Lokální extrémy

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \cdots, n\}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Věta 2 (Postačující podmínky pro lokální extrém)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a nechť $f \in C^2(G)$. Nechť $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Pak

1. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **positivně definitní**, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého **lokálního minima**.
2. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **negativně definitní**, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého **lokálního maxima**.
3. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **indefinitní**, pak funkce f **nenabývá** v bodě a lokálního extrému.

Poznámka 3 (Sylvesterovo kritérium)**.** Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická matice reálných čísel typu (n, n). Označme $\{D_k\}$ posloupnost determinantů levých horních rohů. Pak

1. $\mathbf{A}$ je positivně definitní, právě když všechna $D_k > 0$;
2. $\mathbf{A}$ je negativně definitní, právě když $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0 \ldots$;
3. jestliže všechny hlavní subdeterminanty jsou **nenulové** a navíc nenastaly předchozí případy, pak $\mathbf{A}$ je indefinitní.

Poznámka 4. Symetrická matice $\begin{pmatrix} b & d \\ d & c \end{pmatrix}$ je

1. positivně definitní, právě když $b > 0$ a $bc > d^2$,
2. $\mathbf{A}$ je negativně definitní, právě když $b < 0$ a $bc > d^2$
3. indefinitní, právě když $bc < d^2$.

Algoritmus: Lokální extrémy (v závorce dimenze pro funkci 2 proměnných):

1. **Zderivujeme** - máme (dvě) parciální derivace.
2. Položíme derivace **rovny nule**. Vyřešíme soustavu a najdeme **podezřelé body**.
3. Vytvoříme **matici** druhých derivací (2x2).
4. Dosadíme podezřelé body. Pro každý dostaneme matici. Vyhodnotíme ji Sylvesterovým kritériem (příp. technikami z lingebry) - zjistíme **definitnost**. Tím vyšetříme podezřelé body a získáme **lokální extrémy nebo sedla**.
5. Pokud je matice **semidefinitní**, vyšetříme funkci **„nějak jinak“**.

Poznámka 5. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazení. Pak pro otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ je $f^{-1}(G)$ otevřená v $\mathbb{R}^n$ pro uzavřenou množinu $F \subset \mathbb{R}$ je $f^{-1}(F)$ uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

Definice 6. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, jestliže $\exists K \operatorname{diam}(M) < K$.

Příklady

1. Najděte lokální extrémy funkcí (příklad s * je pracný a na dlouho)

   (a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$
   (b) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$
   (c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
   (d)* $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$
   (e) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x, y > 0$
   (f) $f(x,y) = (x - y + 1)^2$
   (g) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$

2. Najděte lokální extrémy funkcí

   (a) $f(x,y) = 2y^2 - 4xy + x^4 + 3$
   (b) $f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$
   (c) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$
   (d) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$

3. Určete, zda jsou následující množiny otevřené nebo uzavřené a pečlivě zdůvodněte:

   (a) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 \leq 2\}$
   (b) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \arctan(x^2 + y^2) > 5\}$
   (c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -3 < e^{|x^2-y^2|} < 2\}$
   (d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3, x + y \leq 5\}$

4. Určete, zda jsou následující množiny omezené:

   (a) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3\}$
   (b) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} < 10\}$
   (c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
   (d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) \leq 1\}$
   (e) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^6 + y^6 < 2\}$
   (f) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{xy}{x^2 + y^2} < \dfrac{1}{2}\}$

Bonus

5. Ukažte, že funkce $f(x,y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ má v $[0,0]$ lok. minimum vzhledem ke všem přímkám, ale nemá tam minimum.

   Hint: Zkoumejte hodnoty na křivce $[\frac{3}{4}y^2, y]$.

6. Najděte Hessovu matici v následujících funkcí $[0,0]$ a diskutujte existenci maxima – minima – sedla vzhledem k semidefinitnosti matice.

   (a) $x^4 + y^4$
   (b) $-x^4 - y^4$
   (c) $x^4 - y^4$