1. cvičení – Implicitní funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Ukažte, že rovnice $(x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ určuje na okolí bodu $[0,1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

   Zdroj příkladu: http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_3.pdf

   Řešení: Položme $F = (x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,1)$. Pak

   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(0,1) = 1 - 0 - 1 = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2+y^2)2y - 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 1 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$.

   Uvažujme původní rovnici (y je nyní funkce, pro názornost můžeme psát $y(x)$):

   $$(x^2 + y(x)^2)^2 - 3x^2y(x) - y(x)^3 = 0$$

   Zderivujme obě strany podle x (pozor na vnitřní funkci) a vyjádřeme y:

   $$\begin{aligned} 2(x^2 + y(x)^2)(2x + 2y(x)y'(x)) - 6xy(x) - 3x^2y'(x) - 3y(x)^2y'(x) &= 0 \\ 4x^3 + 4x^2y(x)y'(x) + 4xy(x)^2 + 4y(x)^3y(x)' - 6xy(x) - 3x^2y(x)' - 3y(x)^2y(x)' &= 0 \\ y'(x)\left(4x^2y(x) + 4y(x)^3 - 3x^2 - 3y(x)^2\right) &= -4x^3 - 4xy(x)^2 + 6xy(x) \\ y'(x) &= \frac{-4x^3 - 4xy(x)^2 + 6xy(x)}{4x^2y(x) + 2y(x)^3 - 3x^2 - 3y(x)^2} \end{aligned}$$

   Dosadíme $(x, y(x)) = (0,1)$ a získáme

   $$y'(0) = \frac{0}{-1}.$$

   Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici (budeme pro zjednodušení psát y místo $y(x)$).

   $$y'\left(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2\right) = -4x^3 - 4xy^2 + 6xy$$

   Tedy

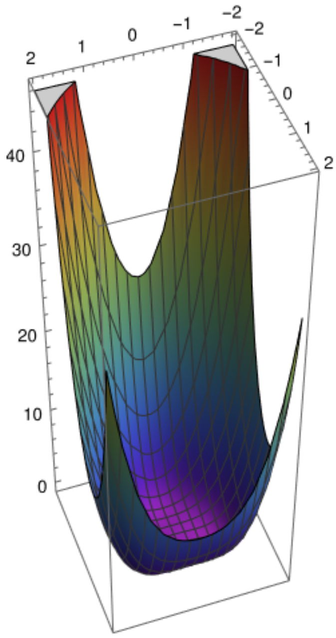
   $$\begin{aligned} y''\left(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2\right) + y'\left(8xy + 4x^2y' + 12y^2y' - 6x - 6yy'\right) = \\ -12x^2 - 4y^2 - 8xyy' + 6y + 6xy' \end{aligned}$$

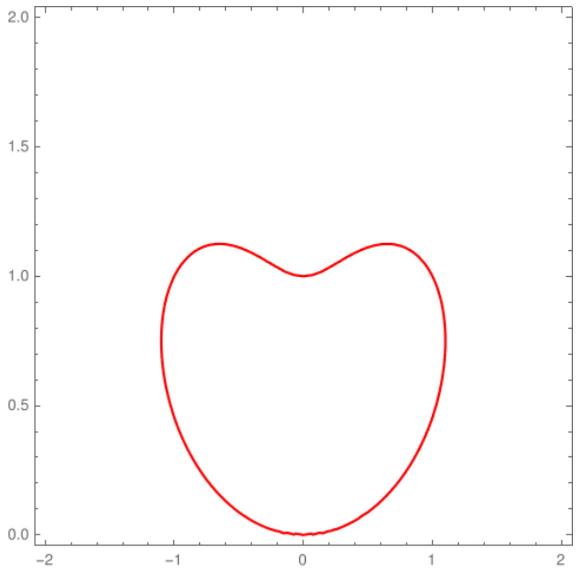
   Dosadíme $x = 0$, $y(x) = 1$ a $y'(x) = 0$.

   $$y''(0)(0 + 4 - 0 - 3) + 0(0 + 0 + 0 - 0 - 0) = -0 - 4 - 0 + 6 + 0$$

   Tedy

   $$y''(0) = 2.$$





2. Ukažte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[-2, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první derivaci této funkce v bodě -2.

   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

   Řešení: Položme $F = x^2 - y^2 + xy^2 - 1$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-2, 1)$. Pak

   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(-2, 1) = 4 - 2 - 1 - 1 = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 2xy$, $\frac{\partial F}{\partial y}(-2, 1) = -2 - 4 = -6 \neq 0$.

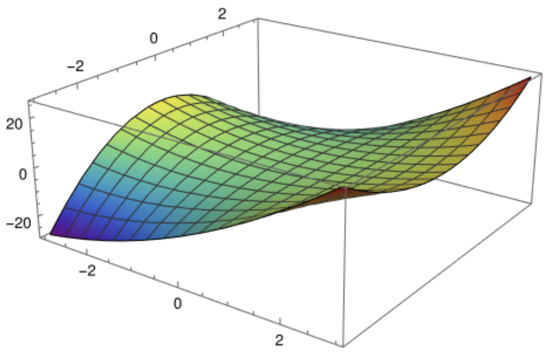
   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$.

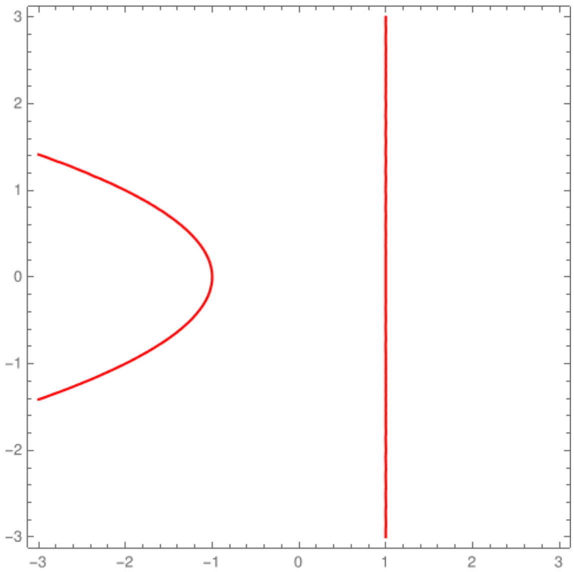
   Zderivujeme podle x a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(-2, 1) = -4 + 1 = -3.$$

   Pak

$$y'(-2) = -\frac{-3}{-6} = -\frac{3}{6}.$$





3. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ určuje na okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1.

   Zdroj příkladu: http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_3.pdf

   Řešení: Položme $F = x^2 + y^2 + xy - 3$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Pak

   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(1, 1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 3 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$. Zderivujeme původní rovnici

$$\begin{aligned} 2x + 2yy' + y + xy' &= 0 \\ y'(2y + x) &= -2x - y \\ y' &= \frac{-2x - y}{2y + x} \end{aligned}$$

   Dosadíme bod $[1, 1]$ a získáme

$$y'(1) = -1.$$

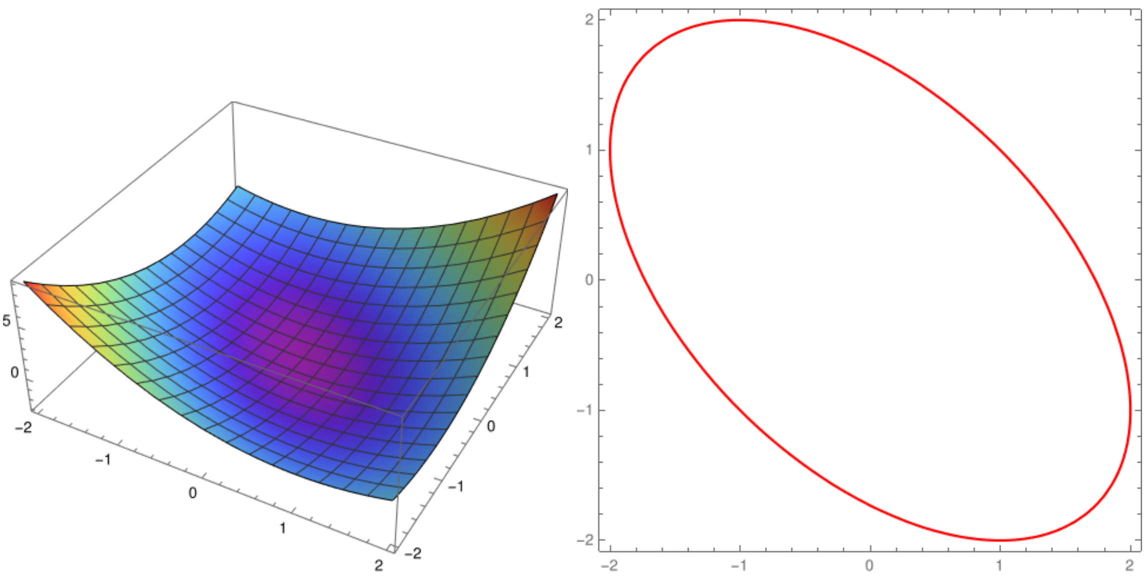
   Pro druhou derivaci zderivujeme ještě jednou

$$\begin{aligned} y''(2y + x) + y'(2y' + 1) &= -2 - y' \\ y'' &= \frac{-y'(2y' + 1) - 2 - y'}{(2y + x)} \\ y'' &= \frac{-2(y')^2 - 2y' - 2}{(2y + x)} \end{aligned}$$

$$y''(2y+x)+y'(2y'+1)=-2-y'$$
$$y''=\frac{-y'(2y'+1)-2-y'}{(2y+x)}$$
$$y''=\frac{-2(y')^2-2y'-2}{(2y+x)}$$

Dosadíme $x=1$, $y=1$, $y'=-1$:

$$y''(1)=\frac{-2+2-2}{2+1}=-\frac{2}{3}.$$



4. Ukažte, že rovnice $y-\frac{1}{2}\sin y=x$ určuje na okolí bodu $[\pi,\pi]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě $[\pi,\pi]$.

   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

   Řešení: Položme $F=y-\frac{1}{2}\sin y-x$, $G=\mathbb{R}^2$, $k=1$ a $(\bar{x},\bar{y})=(\pi,\pi)$. Pak

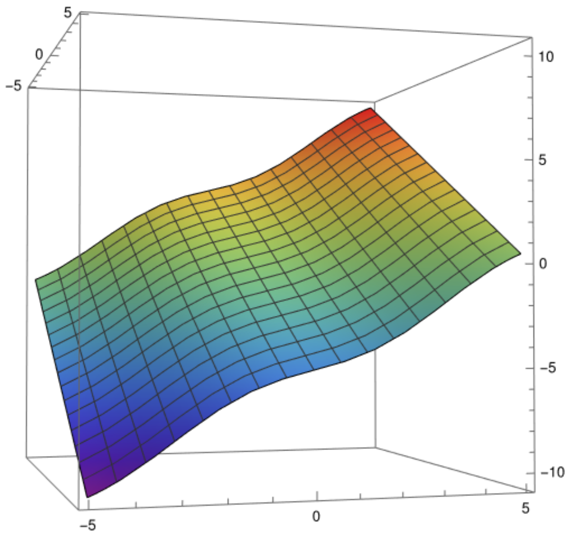
   (a) $F\in\mathcal{C}^k(G)$,
   (b) $F(\pi,\pi)=\pi-0-\pi=0$,
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y}=1-\frac{1}{2}\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi,\pi)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\neq 0$.

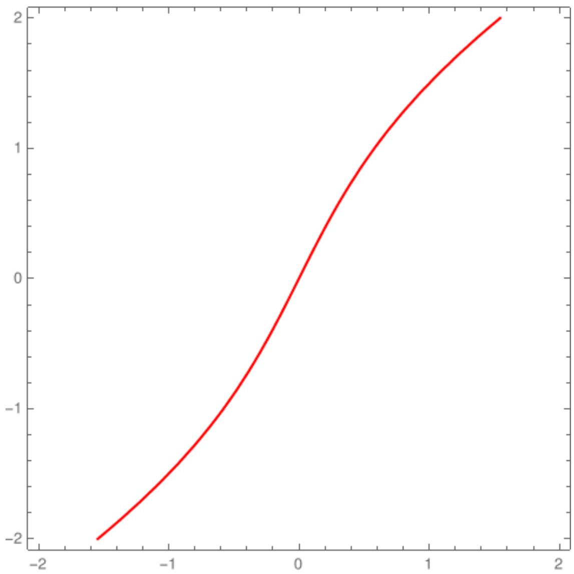
   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon>0$ a $\delta>0$ takové, že pro každé $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ existuje právě jedno $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$ s vlastností $F(x,y)=0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x)\in\mathcal{C}^2((x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon))$.

   Zderivujeme podle x a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-1,\qquad \frac{\partial F}{\partial x}(\pi,\pi)=-1.$$

Pak
$$y'(\pi) = -\frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$
Pro rovnici tečny platí
$$y = y_0 + f'(x)(x - x_0)$$
Tedy
$$y = \pi + \frac{2}{3}(x - \pi).$$





5. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Určete, zda graf této funkce leží na okolí daného bodu pod tečnou nebo nad tečnou.

   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

   Řešení: Položme $F = y - \frac{1}{2}\sin y - x$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak

   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2}\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0.$

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$.

Zderivujeme původní rovnici

$$
\begin{aligned}
y' - \frac{1}{2}\cos y y' &= 1 \\
y'\left(1 - \frac{1}{2}\cos y\right) &= 1 \\
y' &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\cos y\right)}
\end{aligned}
$$

Dosadíme

$$
y'\left(\frac{\pi - 1}{2}\right) = \frac{1}{1-0} = 1
$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme

$$
\begin{aligned}
y''\left(1 - \frac{1}{2}\cos y\right) + y'\left(\frac{1}{2}\sin y y'\right) &= 0 \\
y'' &= -\frac{y'\left(\frac{1}{2}\sin y y'\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\cos y\right)}
\end{aligned}
$$

Dosadíme $x = \frac{\pi-1}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y' = 1$:

$$
y'' = -\frac{\frac{1}{2}}{(1-0)} = -\frac{1}{2}
$$

Dohromady máme: funkce y je $\mathcal{C}^2$, tedy y'' je spojitá. Navíc $y''\left(\frac{\pi-1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$. Odtud máme, že existuje okolí bodu x_0 takové, že druhá derivace je na tomto okolí záporná. Funkce je tam tedy konkávní a leží pod tečnou.

6. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lok. extrémy.

   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

   Řešení: Položme $F = -x^2 + y^2 - 2xy + y$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$. Máme $F \in \mathcal{C}^k(G)$.

   Hledáme takové body (x, y), kde

   (a) $F(x, y) = -x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$
   (b) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2x + 1 \neq 0$
   (c) $y'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0$, tedy $\frac{\partial F}{\partial x} = -2x - 2y = 0$ (stacionární body)

   Ze 3. rovnice máme $y = -x$. Dosadíme do první:

$$
\begin{aligned}
-x^2 + x^2 + 2x^2 - x &= 0 \\
x(2x - 1) &= 0.
\end{aligned}
$$

   Celkem máme body $(0, 0)$ a $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Pro oba je navíc splněna podmínka $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Tedy jsou v obou bodech splněny podmínky věty o implicitní funkci.

Spočteme dvě derivace.

$$-2x + 2yy' - 2y - 2xy' + y' = 0$$
$$y'(2y - 2x + 1) = 2x + 2y$$

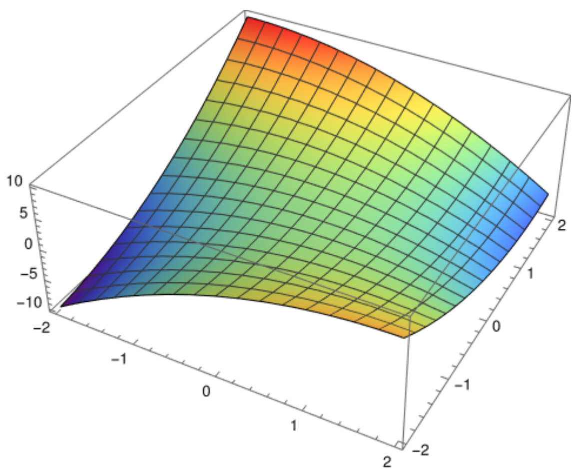
dále

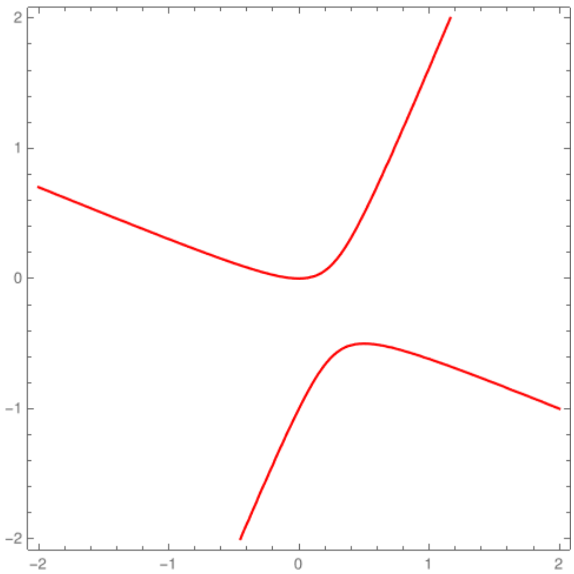
$$y''(2y - 2x + 1) + y'(2y' - 2) = 2 + 2y'$$
$$y'' = \frac{-y'(2y' - 2) + 2 + 2y'}{(2y - 2x + 1)}$$

Dosadíme nalezené body (navíc máme, že $y' = 0$). Tedy

$$y''(0) = \frac{2}{1} > 0.$$
$$y''(\frac{1}{2}) = \frac{2}{-1} < 0.$$

Závěr: v bodě $(0, 0)$ je lok. minimum a v bodě $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ je lok. maximum.





Zkouškové příklady

7. Ukažte, že daná rovnice určeuje na okolí bodu $[\bar{x}, \bar{y}]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\bar{x}$.

   (a) $\sin(xy) + \cos(xy) = 1, [\bar{x}, \bar{y}] = [\pi, 0]$
   (b) $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1, [\bar{x}, \bar{y}] = [1, 0]$
   (c) $\ln(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
   (d) $x^y + y^x = 2y, [\bar{x}, \bar{y}] = [1, 1]$
   (e) $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

(f) $\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2), [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

(g) $\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

Zdroj příkladů: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/fsv/mat2/pisemky/m2-97-98.pdf

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \min\{x^2 + y^2, 2 - x^2 - y^2\}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 2y$$

11d

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = xy + yz \qquad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad E1 : Platí:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

Příklad E2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro funkci f platí:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{pro } x^2+y^2 \le 1; \\ 2-x^2-y^2 & \text{pro } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

V bodech $[x,y]$, kde $x^2+y^2 \neq 1$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2x & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2y & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $x^2+y^2=1$. Uvažujme bod $[x_0,y_0]$ takový, že $x_0^2+y_0^2=1$. Počítejme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\min\{(x_0+t)^2+y_0^2, 2-(x_0+t)^2-y_0^2\}-1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\min\{1+2x_0t+t^2, 1-2x_0t-t^2\}-1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\min\{2x_0t+t^2, -2x_0t-t^2\}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} -|2x_0t+t^2|/t = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 = 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x_0 \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii funkce f lze parciální derivaci podle y počítat analogicky.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ x\neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ y\neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -3 - 2\cdot(x-1) - 4\cdot(y-2).$$

Příklad E3 : Položme

$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$, která obsahuje bod $[1,1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x\log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y\log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x\log\varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad E4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= x + z, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= y, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) &= 1. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

(1) $$y = \lambda_1 2x + \lambda_2,$$

(2) $$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2,$$

(3) $$y = \lambda_1 2z + \lambda_2,$$

(4) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

(5) $$x + y + z = 1.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad 1 : Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^4. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

11

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = z + e^{xy} \qquad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 4)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1 : Standardním postupem obdržíme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&2&1&2&1&1&0&0\\0&-5&-3&-3&-1&0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&0&1&-6&-1&1&2&0\\0&0&-3&17&4&0&-5&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&0&1&-6&-1&1&2&0\\0&0&0&-1&1&3&1&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&1&3&1&0&0&0\\0&1&0&4&1&0&-1&0\\0&0&1&-6&-1&1&2&0\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0&4&9&3&3\\0&1&0&0&5&12&3&4\\0&0&1&0&-7&-17&-4&-6\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&2&0&0&11&26&7&9\\0&1&0&0&5&12&3&4\\0&0&1&0&-7&-17&-4&-6\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&2&1&1\\0&1&0&0&5&12&3&4\\0&0&1&0&-7&-17&-4&-6\\0&0&0&1&-1&-3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Platí tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&1&1\\5&12&3&4\\-7&-17&-4&-6\\-1&-3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Příklad G2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y] \neq [0,0]$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

V bodě $[0,0]$ spočítáme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\operatorname{arctg}(\sqrt{t^2}))^4}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(|t|)}{|t|}\right)^4 \cdot \frac{|t|^4}{t} = 0.$$

Vzhledem k symetrii funkce f platí také $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = (\operatorname{arctg}\sqrt{5})^4 + \frac{2}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x-1) + \frac{4}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (y-2).$$

Příklad G3 : Položme

$$F(x,y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2$$
$$+ e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2$$
$$- e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$-2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

Příklad G4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f, g_1 i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{xy}y, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{xy}x, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = -2z.$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \tag{1}$$
$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \tag{2}$$
$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{5}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x \cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx \qquad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1 : Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Pokud $x = 2$, pak $h(A) = 3$. V případě, že $x \neq 2$, pak lze číslem $x - 2$ dělit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{x-1}{x-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek je nulový, právě když $\frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} = 0$, tj. právě když $x = 7$.

Závěr: $h(A) = 2$ pro $x = 7$, $h(A) = 3$ pro $x \neq 7$.

Příklad H2 : Okamžitě vidíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Pokud $x \neq 0$ lze v bodě $[x, y]$ počítat parciální derivace „podle vzorečků".

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \cos(x\cos y) \cdot \cos y & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot \sin y & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \cos(x\cos y) \cdot (-x \sin y) & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot (x \cos y) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V bodech tvaru $[0, y]$ budeme počítat parciální derivace „z definice":

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,y) - f(t,0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,y)}{t}$$

Tato limita ovšem neexistuje, protože limita zleva $(-\infty)$ se nerovná limitě zprava $(\cos y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{t \to y} \frac{f(0,t) - f(0,y)}{t - y} = \lim_{t \to y} \frac{0}{t - y} = 0.$$

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité, a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \cos(\cos 2) \cdot \cos 2 \cdot (x - 1) - \cos(\cos 2) \cdot \sin 2 \cdot (y - 2) + \sin(\cos 2).$$

Příklad H3 : Položme

$$F(x,y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}.$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\arcsin(x+(\varphi(x))^2)+\pi/2-\arccos(\varphi(x)+x^2)=0,$$
$$\frac{1+2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1-(x+(\varphi(x))^2)^2}}+\frac{\varphi'(x)+2x}{\sqrt{1-(\varphi(x)+x^2)^2}}=0,$$
$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(x+(\varphi(x))^2))\cdot(1+2\varphi(x)\varphi'(x))^2\\ +(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x))\\ -\frac{1}{2}(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(\varphi(x)+x^2))\cdot(\varphi'(x)+2x)^2\\ +(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\varphi''(x)+2)=0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x=0$ a využijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=-1$ a $\varphi''(0)=-4$.

Příklad H4 : Položme

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1, \qquad g_2(x,y,z)=x-y^2-z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{array}{lll}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)=2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)=1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)=-2y\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y)=2x+1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y)=2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y)=-2z\end{array}$$

Zkoumejme pro která $[x,y,z]\in M$ jsou vektory $(2x,2y,2z)$, $(1,-2y,-2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix}1 & -2y & -2z\\ 2x & 2y & 2z\end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix}1 & -2y & -2z\\ 2x+1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x=-\frac{1}{2}$ nebo $y=z=0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad 1 : Řešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y - 1}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad I1 : Napišme si rozšířenou matici $(A|b)$ a proveďme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno spočteme: $x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -3.$

Příklad I2 : Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 1\}$. Pro parciální derivace platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{xy - x - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + y - 1)^2}, \qquad [x, y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0, 0]\}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{xy - x^2 - y}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + y - 1)^2}, \qquad [x, y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0, 0]\}. \end{aligned}$$

V bodě $[0, 0]$ počítejme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sqrt{t^2}}{t-1}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{(t - 1)t} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sgn} t}{t - 1}.$$

Poslední limita neexistuje, protože limita zleva je rovna 1 a zprava je rovna -1. To znamená, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ neexistuje. Naprosto stejným postupem lze ukázat, že ani $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ neexistuje.

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \frac{-3}{4\sqrt{5}} \cdot (x - 1) - \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot (y - 2) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Příklad I3 : Položme

$$F(x, y) = \operatorname{arctg}(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{y}{1 + (y^2 + xy)^2} - e^{xy} y - \sin x, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y + x}{1 + (y^2 + xy)^2} - e^{xy} x - 1. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy

$\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\operatorname{arctg}((\varphi(x))^2 + x\varphi(x)) - e^{x\varphi(x)} + \cos x - \varphi(x) = 0.$$

$$\frac{2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))e^{x\varphi(x)} - \sin x - \varphi'(x) = 0,$$

$$\frac{-2((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))}{(1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2)^2} \cdot (2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x))^2$$
$$+ \frac{2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2}$$
$$-(\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x))e^{x\varphi(x)} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 e^{x\varphi(x)}$$
$$- \cos x - \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -1$.

Příklad I4 : Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a proto musí nabývat maxima i minima na množině M. Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,0];\ x \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_2 = \{[0,y];\ y \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,y];\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Je-li $[x,y] \in H_1$, platí $f(x,y) = \operatorname{arctg} x$. Funkce arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0,0]$ a $[1,0]$. Podobně je tomu na množině H_2. Tam dostáváme podezřelé body $[0,0]$ a $[0,1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Vidíme, že $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Vektor $(2x, 2y)$ je nulový, právě když $[x,y] = [0,0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3. Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

(1) $$x^2 + y^2 = 1$$

(2) $$\frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x$$

(3) $$\frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y$$

Teorie

8. Rozhodněte, zda je podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ ve větě o implicitní funkci nutná. Dokážete sestrojit funkci (alespoň obrázkem), u níž platí všechny předpoklady až na tento, a přesto platí závěr?

   Řešení: Např. funkci $y = \sqrt[3]{x}$ lze nanpsat i jako implicitní funkci k rovnici $y^3 = x$. Pak v bodě $(0, 0)$ není splněna podmínka nenulové derivace, přesto jde zjevně o funkci.

   Jiný příklad na obrázku