1. cvičení – Implicitní funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $[x_0, y_0] \in G$ a nechť platí:

1. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
2. $F(x_0, y_0) = 0$
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^k((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$ a

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \qquad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Příklady

1. Ukažte, že rovnice $(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ určuje na okolí bodu $[0, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.
2. Ukažte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[-2, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první derivaci této funkce v bodě -2.
3. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ určuje na okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1.
4. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\pi, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě $[\pi, \pi]$.
5. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Určete, zda graf této funkce leží na okolí daného bodu pod tečnou nebo nad tečnou.
6. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lok. extrémy.

Zkouškové příklady

7. Ukažte, že daná rovnice určeuje na okolí bodu $[\bar{x}, \bar{y}]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\bar{x}$.
   (a) $\sin(xy) + \cos(xy) = 1, [\bar{x}, \bar{y}] = [\pi, 0]$
   (b) $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1, [\bar{x}, \bar{y}] = [1, 0]$
   (c) $\ln(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

(d) $x^y + y^x = 2y, [\bar{x}, \bar{y}] = [1, 1]$

(e) $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

(f) $\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2), [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

(g) $\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

Teorie

8. Rozhodněte, zda je podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ ve větě o implicitní funkci nutná. Dokážete sestrojit funkci (alespoň obrázkem), u níž platí všechny předpoklady až na tento, a přesto platí závěr?