28. cvičení – Teorie a integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Integrály uvažujeme Newtonovy.

Definice 1. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

1. Dokažte: Nechť I je interval, $f : I \to \mathbb{R}$. Pak f není stejnoměrně spojitá na I právě tehdy, když existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ bodů z I splňující $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   Řešení: "$\Rightarrow$" Předpokládejme, že f není stejnoměrně spojitá na intervalu I. Neboli

   $$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in I,\ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

   Najděme tedy takové $\varepsilon > 0$ a zvolme $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta_n = \frac{1}{n}$. Protože f není stejnoměrně spojitá, tak existuje $x = x_n$ a $y = y_n$ takové, že $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
   Zbývá ukázat, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$. Zvolme $\eta > 0$. Najděme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \eta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

   $$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \eta.$$

   "$\Leftarrow$"
   Mějme takové $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   Z definice limity pro každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \geq n_0$ je $|x_n - y_n| < \delta$.
   Zvolme tedy $\delta > 0$ a položme $x = x_n$ a $y = y_n$. Pak máme $|x - y| < \delta$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
   QED.

2. Nechť $F = \int \frac{1}{x^2}$ a $F(1) = 1$. Je pravda, že $F(-1) = 3$?

3. Nechť $F = \int \frac{1}{x^2}$ a $F(1) = 1$. Je pravda, že $F(-1) = 3$?
   Řešení: Nepravda - problém s s definičním oborem. Funkce $F = -\frac{1}{x} + c_1$ na $(0, \infty)$ a $F = -\frac{1}{x} + c_2$ na $(-\infty, 0)$. Tedy i když z podmínky máme $c_1 = 2$, pořád nevíme nic o c_2.

4. Které/á z následující jsou tvrzení pravdivá?

   A Jestliže $f'(x) = g'(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

   B Jestliže $\int f(x) = \int g(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

   Zdroj: http://www.math.cornell.edu/~GoodQuestions/GQbysection_pdfversion.pdf
   A neplatí, protože i když se rovnají derivace, tak funkce g a f se mohou lišit o konstantu.
   B platí. Označme $F(x) = \int f(x)$ a $G(x) = \int g(x)$. Víme, že $F = G$. Pak ale i $F' = G'$, což je vlastně $f = g$.

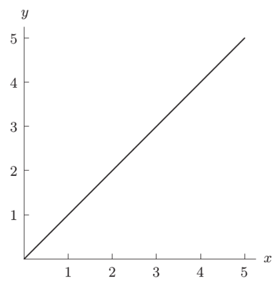
5. PRAVDA – NEPRAVDA Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b).

   NE Jestliže (a, b) je omezený a F je omezená, pak i f je omezená.
   Protipříklad: $F = \sqrt{x}$, $f = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.

NE Jestliže f je omezená a spojitá, pak i F je omezená.
Protipříklad: $f = \frac{1}{x}$, $F = \ln x$ na $(1, \infty)$.

6. PRAVDA Nechť funkce f má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci, g je polynom. Pak k funkci fg existuje primitivní funkce na $\mathbb{R}$.
Řešení: Uvažujme polynom g stupně n.
   - $n = 0$, tedy $g = a$, kde a je konstanta. Pak z linearity
   $$\int af = aF.$$
   - $n = 1$, tedy $g = ax + b$. Pak z per partes (polynom g i g' je spojitá funkce) máme
   $$\int fg = Fg - \int Fg' = Fg - \int Fa.$$
   Integrál na pravé straně existuje, protože Fa je spojitá funkce. (F jako primitivní funkce musí být spojitá.)
   - Obecné n:
   $$\int fg = Fg - \int Fg'$$
   Integrál na pravé straně existuje, protože Fg' je spojitá funkce.

7. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



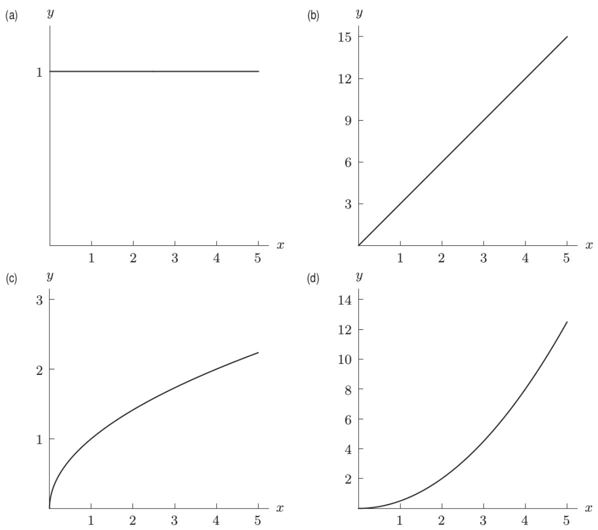
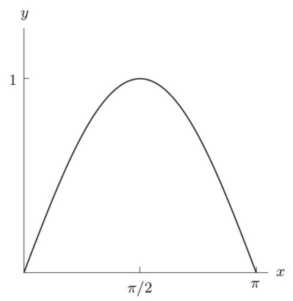


Figure 1: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

D, funkce na obrázku vpravo je $f(x) = x$. Její integrál je $x^2/2$, takže D.

8. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



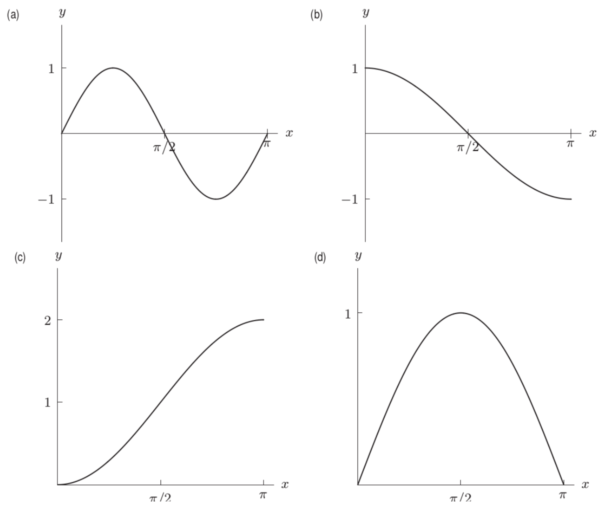
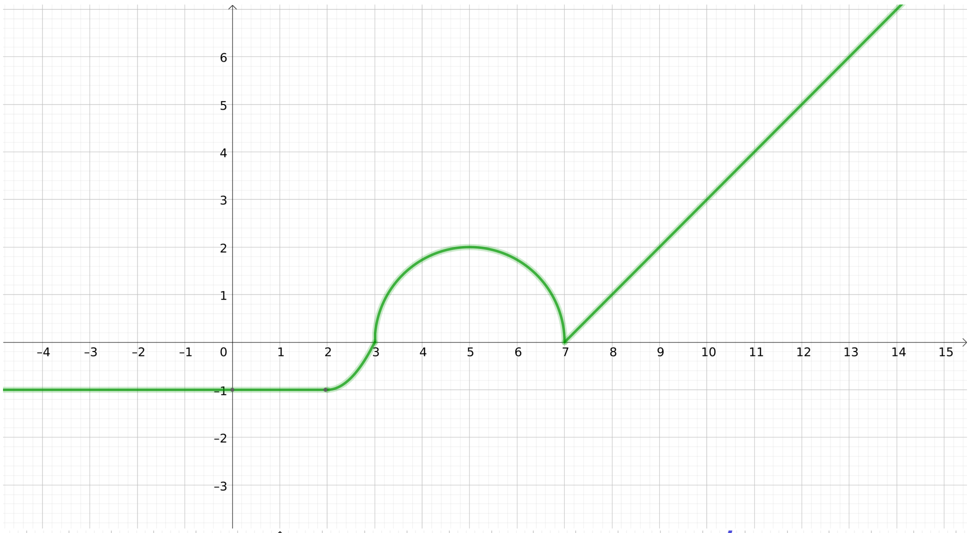
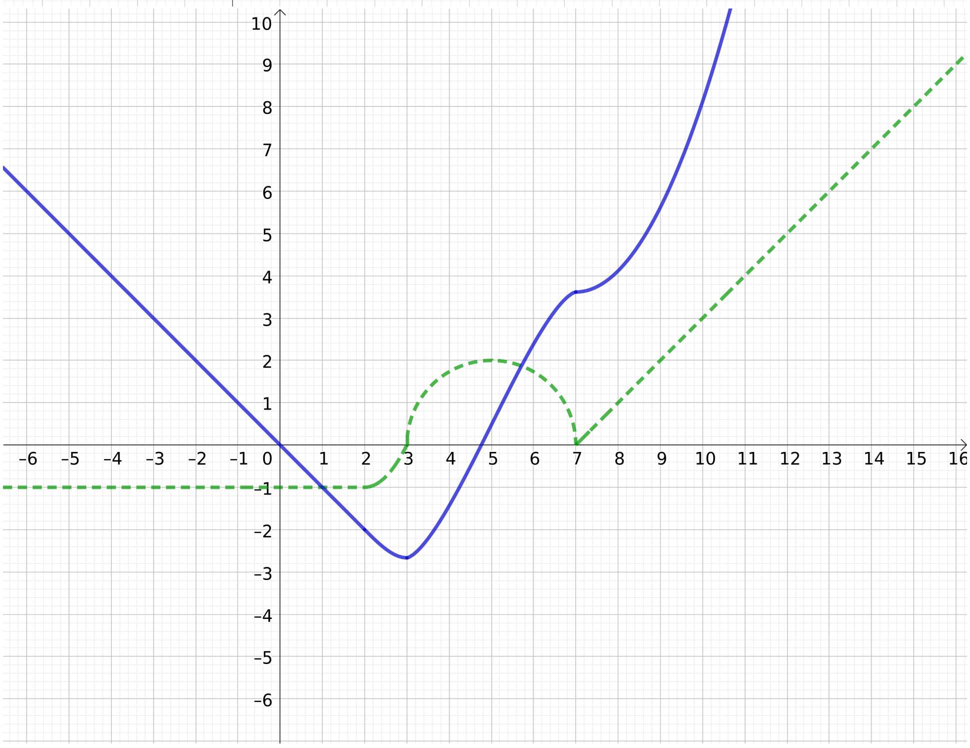


Figure 2: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

C, funkce vpravo (tedy derivace) je kladná, primitivní funkce tedy musí být rostoucí.

9. Na obrázku je funkce f. Načrtněte její primitivní funkci F, jestliže víte, že $F(0) = 0$. (Stačí náčrtek, není nutno hledat primitivní funkci ze vzorečků, jde spíš o grafickou podobu.)





10. Použijte riemannovské sumy k odhadu integrálu

$$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže hodnoty funkce f jsou

Návod: načrtněte funkci, která má hodnoty z tabulky. Pak ji zkuste obalit obdélníky seshora a vyplnit obdélníky zespod. Spočtěte jejich obsahy.

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

Horní odhad: 606
Dolní odhad: 480

11. Nechť $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?

A $\int_a^b f_1 + f_2$ konverguje
B $\int_a^b f_1 + g_2$ diverguje
C $\int_a^b g_1 - g_2$ konverguje
D $\int_a^b f_1 f_2$ konverguje
E $\int_a^b f_1 g_2$ konverguje

Řešení: A - konverguje, linearita integrálu
B - diverguje
C - může konvergovat i divergovat
D - může konvergovat i divergovat
E - může konvergovat i divergovat

12. PRAVDA – NEPRAVDA Nechť $(-a, a) \subseteq \mathbb{R}$.

ANO – NE Nechť f je lichá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 0$
ANO – NE Nechť f je sudá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$

Řešení: Pravda za předpokladu, že integrály existují vlastní. Jinak integrály nemusí existovat.

13. PRAVDA – NEPRAVDA

NE Jestliže $\int_a^b |f(x)|$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)$ konverguje.
NE Jestliže $\int_a^b f(x)$ konverguje, pak $\int_a^b |f(x)|$ konverguje.

Řešení: Obecně neplatí. Protipříklad: f je upravená Dirichletovu funkce s hodnotami -1 a 1. Pak $|f| = 1$ a $\int_0^1 |f| = 1$, kdežto f nemá vůbec primitivní funkci.
Aby platilo, nutno přidat podmínky (např. f spojitá a $\int_a^b f$ existuje - věta z přednášky).
Druhé tvrzení také obecně neplatí, např. $f = \sin x / x$ na $(1, \infty)$.

14. Nechť f je spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu (a, b). Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?
(Negací k $\int_a^b f$ konverguje je výrok $\int_a^b f = \pm\infty$ nebo $\int_a^b f$ neexistuje.)

(a) $\int_a^b f$ konverguje.
(b) $\int_a^b f^2$ konverguje.
(c) $\int_a^b |f|$ konverguje.
(d) f je definovaná a spojitá dokonce na $[a, b]$.

Řešení:

- (a) $\not\Rightarrow$ (b): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.

- (a) $\not\to$ (c): Protipříklad $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,\mathrm{d}x$. Substitucí se převede na $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, o němž víme, že konverguje, ale ne absolutně.

  ——
- (c) $\to$ (a): Absolutní konvergence implikuje konvergenci (věta).
- (b) $\to$ (c): Platí, že $|f| \leq \max\{1, f^2\}$. Ale $\int_a^b 1 < \infty$ a $\int_a^b f^2 < \infty$ také (předpoklad). Odtud (a ze srovnávacího kritéria) už $\int_a^b |f|$ konverguje.

  ——

  Z předchozího pak plyne:
- (b) $\to$ (a)

  ——
- (d) $\to$ (a): Spojitá funkce na omezeném a uzavřeném intervalu je omezená. Integrál konverguje.
- (d) $\to$ (c): Je-li f spojitá na $[a, b]$, je tam spojitá i $|f|$. A tedy integrál konverguje.
- (d) $\to$ (b): Je-li f spojitá na $[a, b]$, je tam spojitá i f^2. A tedy integrál konverguje.

  ——
- (a) $\not\to$ (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.
- (c) $\not\to$ (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.
- (b) $\not\to$ (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ na $(0, 1)$.

15. PRAVDA – NEPRAVDA

    Nechť f je funkce spojitá na $[1, \infty)$.

    NE Jestliže $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pak $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

    NE Jestliže $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

    Řešení: Protipříklad $\int_1^\infty \frac{1}{x}$.

    Protipříklad: Uvažujme funkci f, která má v každém $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ zakreslený rovnoramenný trojúhelník o výšce n a základně $2/n^3$.

    Pak její integrál je roven $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$, ale limita určitě není 0.

16. Najděte horní a dolní riemannovské součty pro Dirichletova funkci

    $$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

    Řešení: $\underline{\int_a^b} D(x) = 0$, $\overline{\int_a^b} D(x) = 1$

17. Sestrojte funkce $f_n(x) : [0, 1] \to [0, \infty)$ tak, že

    (a) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

    (b) pro každé $x \in [0, 1]$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

    Tedy pro tuto posloupnost funkcí platí

    $$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

    P.S.: Stačí obrázkem.

    např. $f_n(x) = 2n\chi_{[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]}$

18. Máme diferenciální rovnici
$$y' = \frac{-\sqrt[3]{y+1}}{x}.$$
Rovnici jsme vyřešili a získali následující řešení (k je konstanta a platí $k > 0$):
   (a) $y = -1$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
   (b) $y = -1 - \left(\sqrt{-\frac{2}{3}\ln(k|x|)}\right)^3$ na $(0, 1/k)$ a $(-1/k, 0)$.
   (c) $y = -1 + \left(\sqrt{-\frac{2}{3}\ln(k|x|)}\right)^3$ na $(0, 1/k)$ a $(-1/k, 0)$.

   Najděte maximální možná řešení. (Neboli slepte v bodech, kde to lze.)
   Příklad z https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf
   Řešení: V 0 slepit nelze, protože tam rovnice nemá smysl.
   V bodech $\pm 1/k$ je
$$\lim_{x \to \pm 1/k\pm} -1 \pm \left(\sqrt{-\frac{2}{3}\ln(k|x|)}\right)^3 = -1$$
   a tedy lze nalepit na stacionární řešení. Dohromady
$$y = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt{-\frac{2}{3}\ln(k|x|)}\right)^3, & x \in (0, 1/k), \\ -1, & x \in [1/k, \infty), \end{cases}$$
   nebo
$$y = \begin{cases} -1, & x \in (0, 1/k), \\ -1 \pm \left(\sqrt{-\frac{2}{3}\ln(k|x|)}\right)^3, & x \in [1/k, \infty). \end{cases}$$

19. Máme diferenciální rovnici
$$yy' = \frac{1-2x}{y}.$$
Rovnici jsme vyřešili a získali následující řešení (k je konstanta): $y = \sqrt[3]{3(x - x^2 + k)}$ na intervalech
   (a) $x \in \mathbb{R}$ pro $k \in (-\infty, -1/4)$
   (b) $x \in (-\infty, 1/2)$, $x \in (1/2, \infty)$ pro $k = -1/4$
   (c) $x \in (-\infty, 1/2 - \sqrt{k + 1/4})$, $x \in (1/2 - \sqrt{k+1/4}, 1/2 + \sqrt{k+1/4})$, $x \in (1/2 + \sqrt{k+1/4}, \infty)$ pro $k \in (-1/4, \infty)$

   Řešení nelze slepit a to ani pro $k = -1/4$. Proč? Proč selže lepicí lemma?
   Zdroj:https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/
   Řešení: Řešení by šlo spojitě slepit, ale v bodech lepení by byla nekonečná derivace, což diferenciální rovnice nepovoluje.
   Lemma selže - ukažme pro bod $x = 1/2$. Pro limitu máme $\lim_{x \to 1/2+} y = 0$. Ale $0 \notin D_g$, kde $g = \frac{1}{y^2}$, cože je podmínka z algoritmu.

20. Máme diferenciální rovnici
$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}e^x.$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Na intervalech $y \in (-\infty, 0)$ a $y \in (0, \infty)$ řešíme a dostáváme

$$\sqrt[3]{y} = e^x + k.$$

Dopočítejte řešení a slepte, kde to lze. (Pozor, pro různá k lepení funguje různě.)
Zdroj:https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/ **Řešení:** Pro $c \in [0, \infty)$ je $y = (e^x + c)^3$, $x \in \mathbb{R}$.
Dále máme $y = 0$ na $x \in \mathbb{R}$.
Pro $c, d \in (-\infty, 0)$, $d < c$ lepíme:

$$y = \begin{cases} (e^x + c)^3, & x \in (-\infty, \ln(-c)], \\ 0, & x \in (\ln(-c), \ln(-d)) \\ (e^x + d)^3, & x \in [\ln(-d), \infty), \end{cases}$$

plus případy

$$y = \begin{cases} (e^x + c)^3, & x \in (-\infty, \ln(-c)], \\ 0, & x \in (\ln(-c), \infty). \end{cases}$$

a

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \ln(-d)) \\ (e^x + d)^3, & x \in [\ln(-d), \infty). \end{cases}$$