28. cvičení – Teorie a integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Integrály uvažujeme Newtonovy.

Definice 1. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in I, \; |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

1. Dokažte: Nechť I je interval, $f : I \to \mathbb{R}$. Pak f není stejnoměrně spojitá na I právě tehdy, když existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ bodů z I splňující $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
2. Nechť $F = \int \frac{1}{x^2}$ a $F(1) = 1$. Je pravda, že $F(-1) = 3$?
3. Které/á z následující jsou tvrzení pravdivá?

   A Jestliže $f'(x) = g'(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

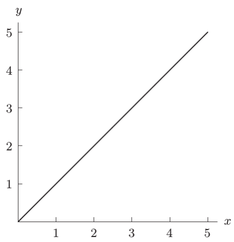
   B Jestliže $\int f(x) = \int g(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

   Zdroj: http://www.math.cornell.edu/~GoodQuestions/GQbysection_pdfversion.pdf
4. PRAVDA – NEPRAVDA Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b).

ANO – NE Jestliže (a, b) je omezený a F je omezená, pak i f je omezená.

ANO – NE Jestliže f je omezená a spojitá, pak i F je omezená.

5. PRAVDA – NEPRAVDA Nechť funkce f má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci, g je polynom. Pak k funkci fg existuje primitivní funkce na $\mathbb{R}$.
6. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



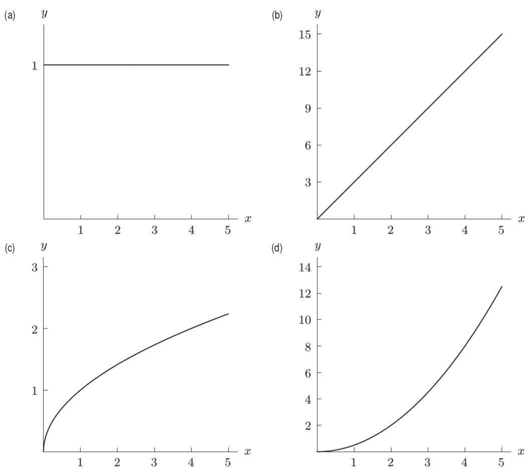
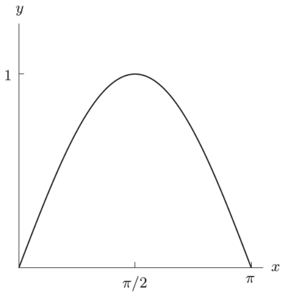


Figure 1: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

7. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



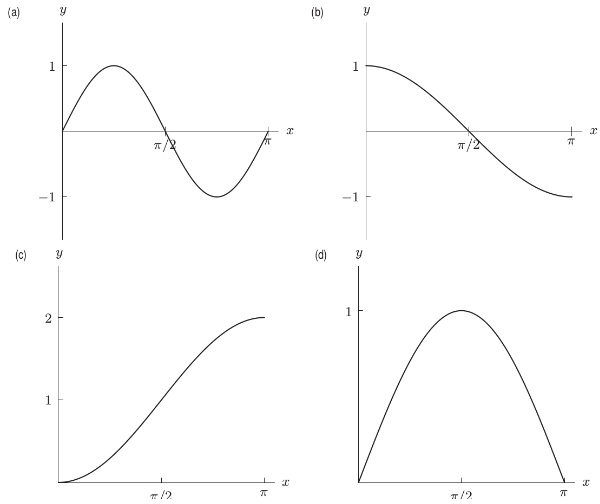
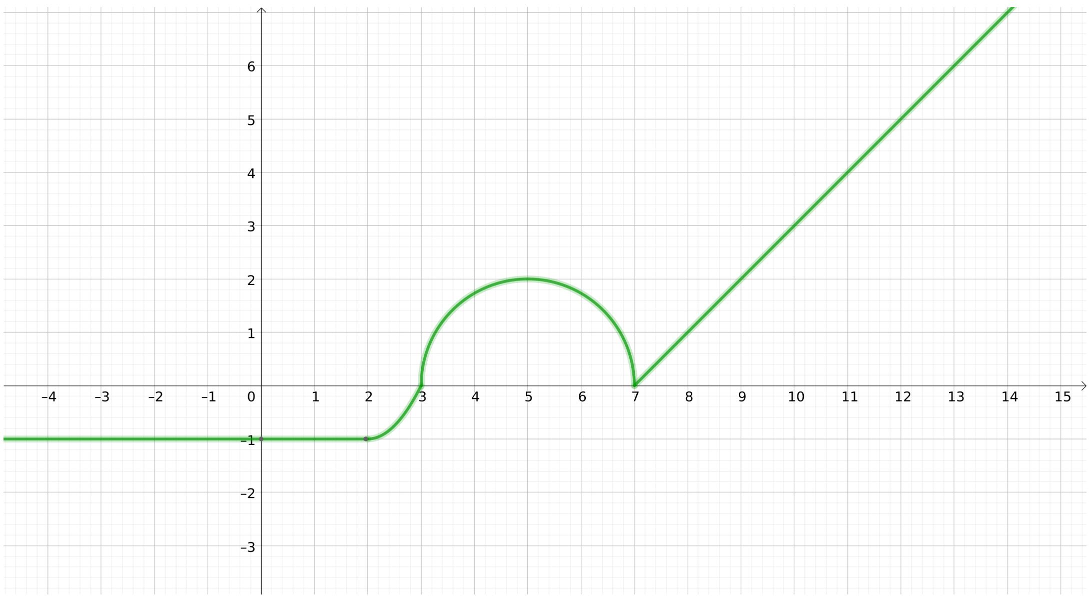


Figure 2: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/concepttests/concept.pdf

8. Na obrázku je funkce f. Načrtněte její primitivní funkci F, jestliže víte, že $F(0) = 0$. (Stačí náčrtek, není nutno hledat primitivní funkci ze vzorečků, jde spíš o grafickou podobu.)



9. ✻ Použijte riemannovské sumy k odhadu integrálu $\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$, jestliže hodnoty funkce f jsou

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

10. Nechť $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?

A $\int_a^b f_1 + f_2$ konverguje

B $\int_a^b f_1 + g_2$ diverguje

C $\int_a^b g_1 - g_2$ konverguje

D $\int_a^b f_1 f_2$ konverguje

E $\int_a^b f_1 g_2$ konverguje

11. PRAVDA – NEPRAVDA Nechť $(-a, a) \subseteq \mathbb{R}$.

ANO – NE Nechť f je lichá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 0$

ANO – NE Nechť f je sudá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$

12. PRAVDA – NEPRAVDA

ANO – NE Jestliže $\int_a^b |f(x)|$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)$ konverguje.

ANO – NE Jestliže $\int_a^b f(x)$ konverguje, pak $\int_a^b |f(x)|$ konverguje.

Věta 2 (Srovnávací kritérium dle I. Černého)**.** Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$. Nechť funkce f je spojitá v intervalu $[a, b)$. Nechť funkce g je definovaná na $[a, b)$, $\int_a^b g$ konverguje a $|f| \leq g$ na (a, b). Pak konvergují i integrály

$$\int_a^b f, \qquad \int_a^b |f|.$$

13. Nechť f je spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu (a, b). Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?
(Negací k $\int_a^b f$ konverguje je výrok $\int_a^b f = \pm\infty$ nebo $\int_a^b f$ neexistuje.)

(a) $\int_a^b f$ konverguje.

(b) $\int_a^b f^2$ konverguje.

(c) $\int_a^b |f|$ konverguje.

(d) f je definovaná a spojitá dokonce na $[a, b]$.

❄(11ac) ✿(11bc)

14. PRAVDA – NEPRAVDA
Nechť f je funkce spojitá na $[1, \infty)$.

ANO – NE Jestliže $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pak $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

ANO – NE ♡ Jestliže $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

15. Najděte horní a dolní riemannovské součty pro Dirichletovu funkci

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

16. ✿ Sestrojte funkce $f_n(x) : [0,1] \to [0,\infty)$ tak, že
    (a) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
    (b) pro každé $x \in [0,1]$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

    Tedy pro tuto posloupnost funkcí platí
$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$
    P.S.: Stačí obrázkem.

17. Máme diferenciální rovnici
$$y' = \frac{-\sqrt[3]{y+1}}{x}.$$
    Rovnici jsme vyřešili a získali následující řešení (k je konstanta a platí $k > 0$):
    (a) $y = -1$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
    (b) $y = -1 - \left(\sqrt{-\frac{2}{3}\ln(k|x|)}\right)^3$ na $(0, 1/k)$ a $(-1/k, 0)$.
    (c) $y = -1 + \left(\sqrt{-\frac{2}{3}\ln(k|x|)}\right)^3$ na $(0, 1/k)$ a $(-1/k, 0)$.

    Najděte maximální možná řešení. (Neboli slepte v bodech, kde to lze.) Příklad z https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

18. Máme diferenciální rovnici
$$yy' = \frac{1-2x}{y}.$$
    Rovnici jsme vyřešili a získali následující řešení (k je konstanta): $y = \sqrt[3]{3(x - x^2 + k)}$ na intervalech
    (a) $x \in \mathbb{R}$ pro $k \in (-\infty, -1/4)$
    (b) $x \in (-\infty, 1/2)$, $x \in (1/2, \infty)$ pro $k = -1/4$
    (c) $x \in (-\infty, 1/2 - \sqrt{k + 1/4})$, $x \in (1/2 - \sqrt{k+1/4}, 1/2 + \sqrt{k+1/4})$, $x \in (1/2 + \sqrt{k+1/4}, \infty)$ pro $k \in (-1/4, \infty)$

    Řešení nelze slepit a to ani pro $k = -1/4$. Proč? Proč selže lepicí lemma?
    Zdroj:https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/

19. Máme diferenciální rovnici
$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}e^x.$$
    Máme stacionární řešení $y = 0$ na $\mathbb{R}$. Na intervalech $y \in (-\infty, 0)$ a $y \in (0, \infty)$ řešíme a dostáváme
$$\sqrt[3]{y} = e^x + k.$$
    Dopočítejte řešení a slepte, kde to lze. (Pozor, pro různá k lepení funguje různě.)
    Zdroj:https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/

(9) Načrtněte funkci, která má hodnoty z tabulky. Pak ji zkuste obalit obdélníky seshora a vyplnit obdélníky zespod. Spočtěte jejich obsahy.
(13ac) uměli byste to na neomezeném (a,b)?

(13bc) $|f| \leq \max 1, f^2$
(14) f z úzkých ale vysokých kopečků.
(16) f z úzkých ale vysokých kopečků.