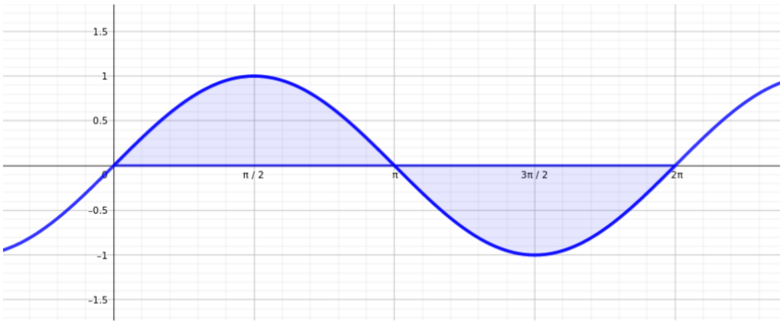
27. cvičení – Aplikace určitého integrálu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

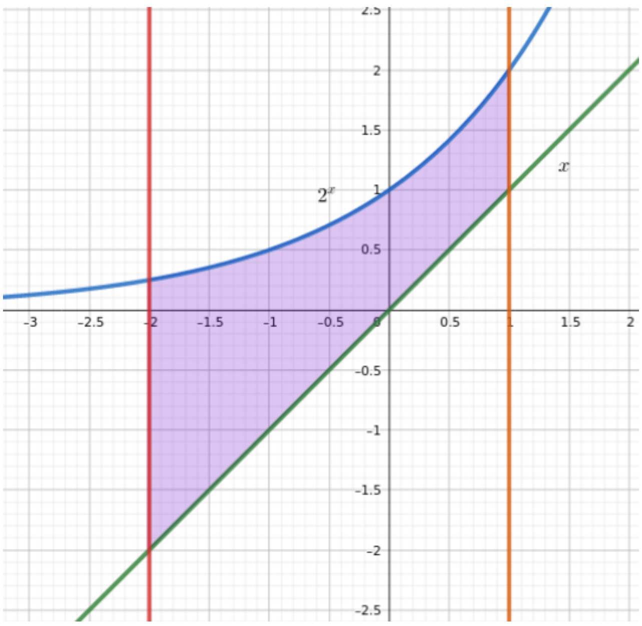
1. (a) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.
Zdroj: http://www.realisticky.cz/
Řešení: Načrtneme:



Plochu pak spočteme zvlášť nad osou x a zvlášť pod ní. Celkem tedy

$$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x - \int_\pi^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi - [-\cos x]_\pi^{2\pi} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

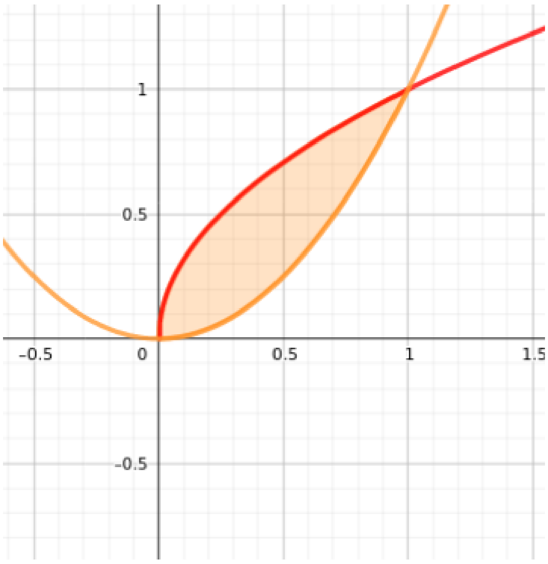
(b) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = 2^x$, $y = x$, $x = -2$, $x = 1$.
Zdroj: http://www.realisticky.cz/
Řešení: Načrtneme:



Plochu pak spočteme jako

$$\int_{-2}^1 2^x - x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2^x}{\log 2} - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^1 = \frac{1}{\log 2}\left(2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4\log 2} + \frac{3}{2}$$

(c) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.
Zdroj: http://www.realisticky.cz/
Řešení: Načrtneme:



Nejprve najdeme průsečíky jednotlivých křivek. Tedy pro $x > 0$ hledáme

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x^2 \\ \sqrt{x}(1 - x\sqrt{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Zřejmě $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
Plochu pak určuje integrál

$$\int_0^1 x^2 - \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(d) Určete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 2$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy x.
Zdroj: http://www.realisticky.cz/
Řešení: Těleso lze popsat jako $\sqrt{y^2 + z^2} \leq 2$. Jeho objem pak vyjadřuje

$$\pi \int_0^4 2^2\,\mathrm{d}x = \pi[4x]_0^4 = 16\pi$$

2. Spočtěte

(a) Určete délku grafu funkce $y = \log x$ pro $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$.
Zdroj: https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poctu.pdf
Řešení: Křivku φ lze popsat jako $(x, \log x)$, kde $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$. Pak $\varphi'(x) = (1, \frac{1}{x})$.
Její délka je pak

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci $t = \sqrt{1+x^2}$, pak ($x > 0$, $t > 0$) máme $x = \sqrt{t^2-1}$, $\mathrm{d}x = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$. Dostáváme

$$\int_2^4 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_2^4 \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^4 1 + \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \left[t + \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^4$$
$$= 4 + \frac{1}{2}\log\frac{3}{5} - 2 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{3} = 2 + \log 3 - \frac{1}{2}\log 5$$

(b) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $y = 4 + x$, $x \in [-4, 2]$, kolem osy x.

Zdroj: https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poctu.pdf

Řešení: Těleso lze popsat jako $\sqrt{y^2+z^2} \leq 4 + x$. Obsah jeho pláště pak je

$$2\pi \int_{-4}^{2} (4+x)\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\pi\left[4x + \frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^{2} = 2\sqrt{2}\pi(8+2+16-8) = 36\pi\sqrt{2}$$

(c) Určete objem koule o poloměru $r > 0$.

Zdroj: http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola_3_3.pdf

Řešení: Kouli lze popsat jako $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.

Neboli jako $\sqrt{y^2+z^2} \leq \sqrt{r^2-x^2}$. Objem koule pak je

$$\pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

(d) Určete objem kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.

Zdroj: http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola_3_3.pdf

Řešení: Kužel položíme „naležato". Pak jej lze popsat jako $\sqrt{y^2+z^2} \leq \frac{rx}{v}$, kde $x \in [0, v]$.

Jeho objem pak je

$$\pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2}x^2\,\mathrm{d}x = \pi\frac{r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

(e) Spočtěte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in [0, 1]$ **kolem osy** y.

Zdroj: http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola_3_3.pdf

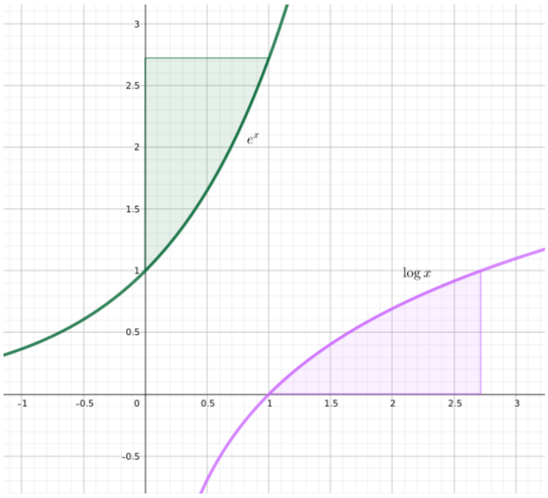
Řešení: Toto těleso je stejné, jako těleso, které vznikne rotováním křivky $y = \log x$, $x \in [1, e]$ kolem osy x.

To pak lze popsat jako $\sqrt{y^2+z^2} \leq \log x$, kde $x \in [1, e]$. Jeho objem pak je

$$\pi \int_1^e \log^2 x\,\mathrm{d}x$$

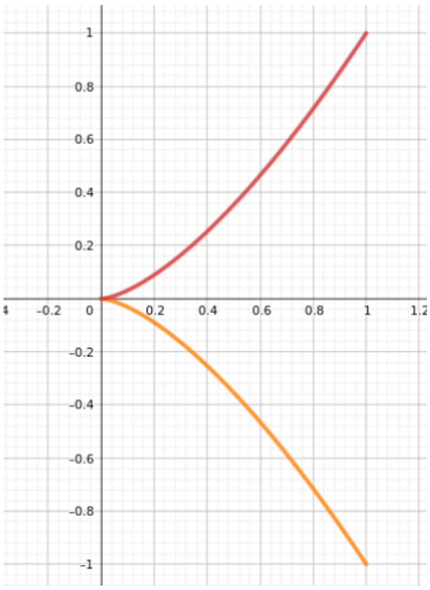
Integrál vyřešíme pomocí per partes ($u' = 1$, $v = \log^2 x$), tedy dostaneme

$$\pi\left([x\log^2 x]_1^e - \int_1^3 2\log x\right) = \pi\left([x\log^2 x]_1^e - [2(x\log x - x)]_1^e\right)$$
$$= \pi\,(e - 2e + 2e - 2) = \pi(e-2)$$



3. Spočtěte

   (a) Určete délku grafu semikubické paraboly $y^2 = x^3$ pro $x \in [0, 1]$.
   Zdroj: http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola_3_3.pdf
   Řešení: Křivku nejprve rozdělíme na křivku $\varphi_1(t) = (t, \sqrt{t^3})$, kde $t \in [0, 1]$ a na křivku $\varphi_2(t) = (t, -\sqrt{t^3})$, kde $t \in [0, 1]$



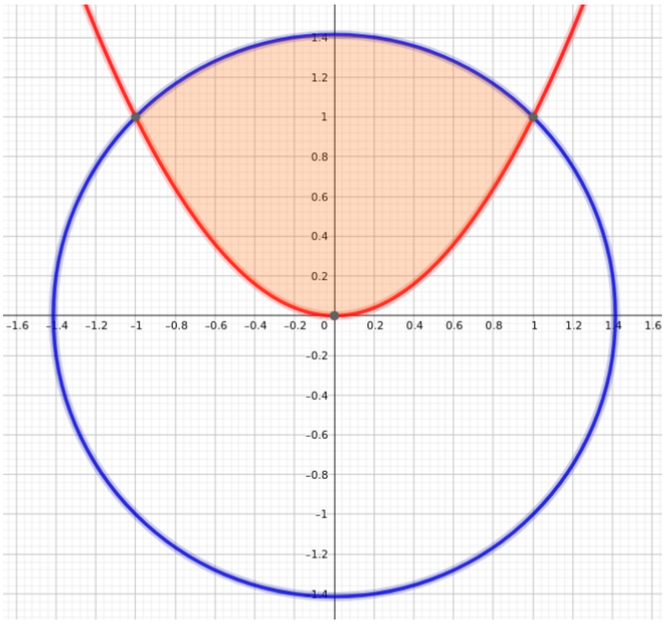
   Pak $\varphi_1'(t) = (1, \frac{3}{2}\sqrt{t})$, $\varphi_2'(t) = (1, -\frac{3}{2}\sqrt{t})$.
   Délka celé křivky je pak

$$2\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\right)^3 \cdot \frac{4}{9}\right]_0^1 = \frac{16}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1\right)$$

   (b) ♡ Určete obsah plochy dané nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 2$ a $y \geq x^2$.

Zdroj: https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poctu.pdf

Řešení: Načrtneme



Dále najdeme průsečíky křivek $y = x^2$ a $x^2 + y^2 = 2$. Tedy

$$y + y^2 - 2 = 0$$

Pak $y_1 = 1$ a $y_2 = -2$. Protože $y = x^2 \geq 0$, tak uvažujeme pouze $y_1 = 1$. K němu patří $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Dále vyjádříme horní půlkružnici jako $y = \sqrt{2 - x^2}$. Obsah obrazce pak spočteme jako

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2} - x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2} \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x$$

Máme

$$\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

Pro výpočet integrálu

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2} \,\mathrm{d}x$$

použijeme substituci $x = \sqrt{2} \sin t$. Pak $\mathrm{d}x = \sqrt{2} \cos t \,\mathrm{d}t$ a dostaneme

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 - 2\sin^2 t} \cdot \sqrt{2} \cos t \,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2 t \,\mathrm{d}t$$

Poslední integrál vyřešíme pomocí per partes nebo vyjádříme $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ (plyne ze vzorců $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ a $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$).

Tedy

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2 t \, \mathrm{d}t = [t + \sin t \cos t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

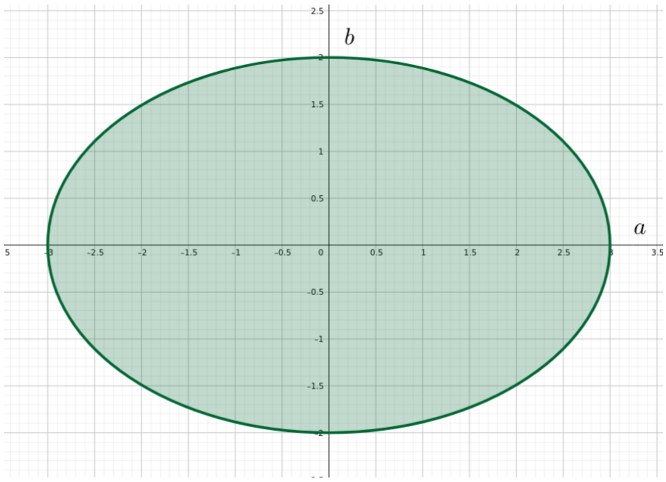
Závěr: Obsah obrazce je roven

$$\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$

(c) ❀ Určete obsah plochy elipsy s poloosami a a b.
Zdroj: https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poctu.pdf
Řešení: Elipsa je dána rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde $a, b > 0$.



Lze vyjádřit

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

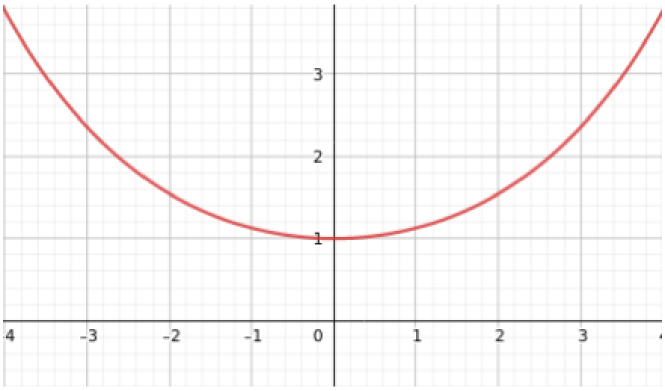
Obsah elipsy je pak

$$2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, \mathrm{d}x = 4\int_{0}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, \mathrm{d}x$$

Použijeme goniometrickou substituci $x = a\sin t$, $\mathrm{d}x = a\cos t$. Dostáváme

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a\cos t \, \mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = 2ab[t + \sin t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

(d) Určete délku grafu řetězovky $y = a\cosh\frac{x}{a}$ pro $x \in [-1, 1]$, kde $a > 0$ je parametr.
Zdroj: https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poctu.pdf



Řešení: Uvažujme $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$. Pak $f'(x) = \sinh \frac{x}{a}$.
Délku křivky pak spočteme jako

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}}\, \mathrm{d}x$$

Protože $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, máme

$$\int_{-1}^{1} \cosh \frac{x}{a}\, \mathrm{d}x = \left[a \sinh \frac{x}{a}\right]_{-1}^{1} = a \left(\sinh \frac{1}{a} - \sinh \frac{-1}{a}\right)$$

4. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o absolutní konvergenci řad

   Zdroje příkladů: Matematika III - Sbírka příkladů, D. Janovská, D. Turzík, M. Dubcová, Š. Axmann

   https://is.muni.cz/th/s1bbr/Bakalarska_prace.pdf https://theses.cz/id/hyqwbf/402458 https://susta.cz/m/ciselne_rady_p_VUT.pdf

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

   Řešení:
   Zaveďme funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in [1, \infty)$. Pak $a_n = f(n)$ a f je na $[1, \infty)$ nezáporná, nerostoucí a spojitá.
   Integrál
   $$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = [\arctan x]_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4},$$
   tedy konverguje.
   Pak z integrálního kritéria konverguje i zadaná řada.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

   Řešení:
   Zaveďme funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ pro $x \in [1, \infty)$. Pak $a_n = f(n)$ a f je na $[1, \infty)$ nezáporná, nerostoucí a spojitá.

Integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{1+x}]_1^\infty = \infty$$

tedy diverguje.

Pak z integrálního kritéria diverguje i zadaná řada.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Řešení: Pro $\alpha \leq 0$ řada diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence.

Pro $\alpha > 0$ zaveďme funkci $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pro $x \in [1, \infty)$. Pak $a_n = f(n)$ a f je na $[1, \infty)$ nezáporná, nerostoucí a spojitá.

Integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$, diverguje pro $\alpha \leq 1$ (integrál lze přímo spočítat).

Pak z integrálního kritéria řada konverguje pro $\alpha > 1$, diverguje pro $\alpha \in (0, 1]$.

Závěr: Řada konverguje právě pro $\alpha > 1$, jinak diverguje.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^\beta n}$, $\beta \geq 0$

Řešení:

Zaveďme funkci $f(x) = \frac{1}{x \log^\beta x}$ pro $x \in [2, \infty)$. Pak $a_n = f(n)$ a f je na $[2, \infty)$ nezáporná, nerostoucí a spojitá.

Integrál

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \log^\beta x}\,\mathrm{d}x$$

spočteme pomocí substituce $y = \log x$. Dostaneme

$$\int_{\log 2}^\infty \frac{1}{y^\beta}\,\mathrm{d}y,$$

který konverguje právě pro $\beta > 1$, diverguje pro $\beta \in [0, 1]$.

Pak z integrálního kritéria zadaná řada konverguje právě pro $\beta > 1$, diverguje pro $\beta \in [0, 1]$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\arctan^3 n}{1+n^2}$

Řešení:

Zaveďme funkci $f(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}$ pro $x \in [1, \infty)$. Pak $a_n = f(n)$ a f je na $[1, \infty)$ nezáporná a spojitá.

Ověřme monotonii.

$$f'(x) = \frac{(\arctan x)^2(3 - 2x \arctan x)}{(1+x^2)^2}$$

Určující je znaménko funkce $g(x) = 3 - 2x \arctan x$. Ta je zřejmě klesající a platí $g(2) = 3 - 4\frac{\pi}{4} < 0$. Tedy pro $x \geq 2$ je určitě $3 - 2x \arctan x < 0$. Tedy $f' \leq 0$ a funkce f je nerostoucí.
Uvažujme tedy funkci $f(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}$ pro $x \in [2, \infty)$. Pak $a_n = f(n)$ a f je na $[2, \infty)$ nezáporná, nerostoucí a spojitá.
Integrál

$$\int_2^\infty \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

řešíme substitucí $y = \arctan x$. Dostaneme

$$\int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} y^3 \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^4}{4}\right]_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(\frac{\pi}{2})^4}{4} - \frac{(\arctan 2)^4}{4},$$

tedy integrál konverguje.
Pak z integrálního kritéria konverguje i zadaná řada.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

Řešení:
Zaveďme funkci $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ pro $x \in [1, \infty)$. Pak $a_n = f(n)$ a f je na $[1, \infty)$ nezáporná a spojitá.
Ověřme, že je nerostoucí.

$$f'(x) = \frac{1 - 2\log x}{x^3} \leq 0, \qquad x \in [\sqrt{e}, \infty).$$

Funkce tedy není nerostoucím na celém $x \in [1, \infty)$.
Uvažujme tedy funkci $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ pro $x \in [2, \infty)$. Pak $a_n = f(n)$ a f je na $[2, \infty)$ nezáporná, nerostoucí a spojitá.
Integrál

$$\int_2^\infty \frac{\log x}{x^2} \, \mathrm{d}x =$$

substitucí $y = \log x$ převedeme na

$$\int_{\log 2}^\infty ye^{-y} = [-ye^{-y} - e^{-y}]_{\log 2}^\infty = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}$$

tedy konverguje.
Pak z integrálního kritéria konverguje i zadaná řada.

Zkouškové příklady

(a) Spočtěte objem tělesa

$$T = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq \tan z, z \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

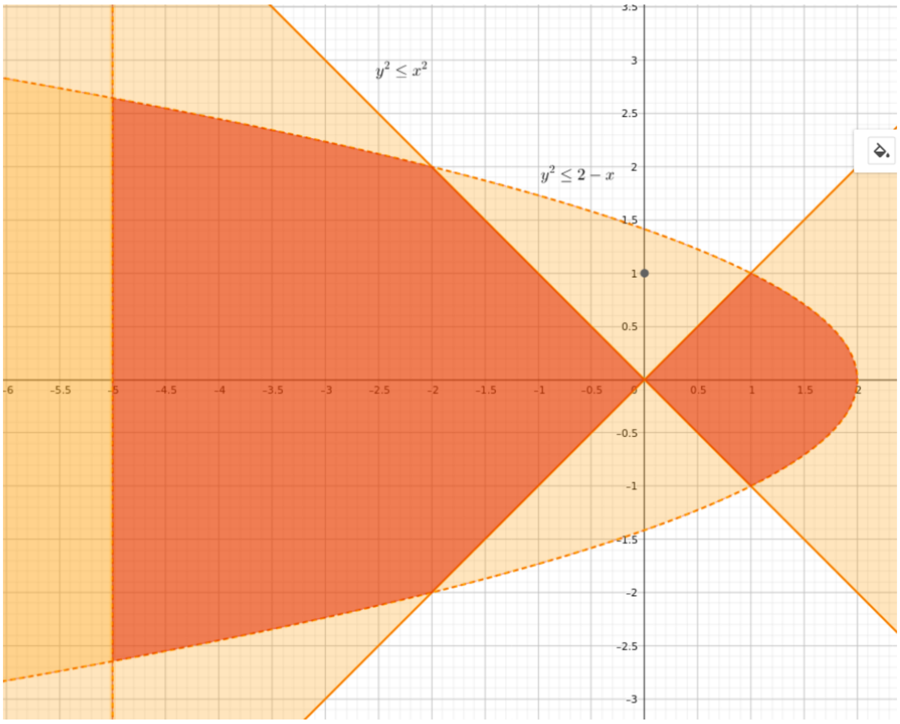
Řešení: Z nerovnice plyne, že $\tan z \geq 0$, tedy budeme uvažovat pouze $z \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
Objem tělesa spočteme jako

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \, \mathrm{d}x = \pi \left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Spočtěte objem tělesa

$$T = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq -5,\ y^2 + z^2 \leq x^2,\ y^2 + z^2 \leq 2 - x\right\}$$

Řešení: Načrtněme řez tělesem.



Z náčrtku pak plyne, že objem tělesa spočteme jako

$$\begin{aligned}
&\pi \int_{-5}^{-2} (\sqrt{2-x})^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_{-2}^{0} (-x)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_{0}^{1} (x)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_{1}^{2} (\sqrt{2-x})^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-5}^{-2} 2 - x \,\mathrm{d}x + \pi \int_{-2}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_{1}^{2} 2 - x \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left(\left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-5}^{-2} + \left[\frac{1}{3}x^2\right]_{-2}^{1} + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2} \right) \\
&= \pi \left(-4 - 2 + 10 + \frac{25}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \right) = 16
\end{aligned}$$

(c) Spočtěte délku křivky

$$y = \sqrt{x+1},\ x \in [0, 1]$$

Řešení: Mějme $f(x) = \sqrt{x+1}$. Pak $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Délku dané křivky tedy spočteme jako

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4(x+1)}} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\frac{4x+5}{4x+4}} \,\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci

$$y = \sqrt{\frac{4x+5}{4x+4}}$$

Pak

$$x = \frac{5-4y^2}{4(y^2-1)} = -1 + \frac{1}{4y^2-4}$$

a

$$\mathrm{d}x = -\frac{y}{2(y^2-1)^2}\,\mathrm{d}y$$

Dostaneme integrál

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{5/4}}^{\sqrt{9/8}} -y\frac{y}{2(y^2-1)^2}\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{8}\int_{\sqrt{5/4}}^{\sqrt{9/8}} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{(y-1)^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{8}\left[\log(y+1) - \log(y-1) + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1}\right]_{\sqrt{5/4}}^{\sqrt{9/8}} \\
&= \frac{1}{8}\Bigg(\log\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}+1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}-1} + \frac{1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}+1} + \frac{1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}-1} \\
&\qquad - \log\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+1} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}\Bigg)
\end{aligned}$$