27. cvičení – Aplikace určitého integrálu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (Integrální kritérium)**.** Nechť f je **nezáporná nerostoucí spojitá** funkce na $[n_0, \infty)$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 2 (Objem a povrch rotačního tělesa)**.** Nechť f je **spojitá a nezáporná** na intervalu $[a, b]$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

(= Rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, kolem osy x.) Pak objem T je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nechť má f navíc spojitou derivaci $f'(x)$ na $[a, b]$. Pak povrch pláště T je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Definice 3. *Křivkou* budeme rozumět spojité zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. *Křivkou třídy* $\mathcal{C}^1$ rozumíme křivku $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ takovou, že φ_i' je spojité na $[a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci.

Věta 4 (Délka oblouku křivky)**.** Nechť má funkce f spojitou derivaci f' na intervalu $[a, b]$. Pak délka této křivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Nechť $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka třídy $\mathcal{C}^1$. Pak

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_n'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Příklady

1. (a) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.
   (b) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = 2^x$, $y = x$, $x = -2$, $x = 1$.
   (c) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.
   (d) Určete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 2$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy x.

2. Spočtěte
   (a) ✤ Určete délku grafu funkce $y = \log x$ pro $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$.
   (b) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $y = 4 + x$, $x \in [-4, 2]$, kolem osy x.
   (c) Určete objem koule o poloměru $r > 0$.
   (d) Určete objem kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.
   (e) Spočtěte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in [0, 1]$ **kolem osy** y.

3. Spočtěte
   (a) ❄ Určete délku grafu semikubické paraboly $y^2 = x^3$ pro $x \in [0, 1]$.
   (b) ♡ Určete obsah plochy dané nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 2$ a $y \geq x^2$.
   (c) ❀ Určete obsah plochy elipsy s poloosami a a b.
   (d) Určete délku grafu řetězovky $y = a \cosh \frac{x}{a}$ pro $x \in [-1, 1]$, kde $a > 0$ je parametr.

4. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o absolutní konvergenci řad

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\beta n}$, $\beta \geq 0$
   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{1+n^2}$
   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

Zkouškové příklady

(a) Spočtěte objem tělesa

$$T = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq \tan z, z \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

(b) Spočtěte objem tělesa

$$T = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq -5,\ y^2 + z^2 \leq x^2,\ y^2 + z^2 \leq 2 - x\right\}$$

(c) Spočtěte délku křivky

$$y = \sqrt{x+1},\ x \in [0, 1]$$

(2a) substituce, $x = \sqrt{1 + x^2}$
(3a) dvě křivky: $(t, \sqrt{t^3})$ a $(t, -\sqrt{t^3})$
(3b) substituce, $x = \sqrt{2} \sin t$
(3c) substituce, $x = a \sin t$