



26. cvičení – ODR vyššího řádu + variace konstant

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmus

1. Vyřešíme **homogenní** rovnici a sestavíme řešení (kde se bude vyskytovat několik konstant).
2. **Zkontrolujeme**, jestli příklad přeci jen není na **speciální pravou stranu**.
3. Přepíšeme **konstanty** na „**funkce**“ a jdeme derivovat. Po každém **zderivování** se položí část rovnice s derivacemi c' **rovna 0**. Konkrétně: začínáme s funkcí

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x).$$

Po 1. zderivování dostaneme

$$y_p' = (c_1y_1' + c_2y_2' + \dots + c_ny_n') + (c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n)$$

a položíme

$$(c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n) = 0.$$

Po 2. zderivování dostaneme

$$y_p'' = (c_1y_1'' + c_2y_2'' + \dots + c_ny_n'') + (c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n')$$

a položíme

$$(c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n') = 0.$$

Po n -tém zderivování dostaneme

$$y_p^{(n)} = (c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \dots + c_ny_n^{(n)}) + (c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)})$$

a dosadíme do původní nehomogenní rovnice. Dostaneme

$$(c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)}) = f.$$

4. Z **modrých řádků** získáme soustavu pro c' , spočteme.
5. Zintegrujeme konstanty c' .
6. Řešením je **homogenní + dypočtené** řešení.
7. Případně dořešíme **podmínky**.

Hinty

$$\int \frac{t}{1+t} dt = \int 1 - \frac{1}{1+t} dt$$
$$\int -\sin x \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x - 1} dx = \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \int 1 + \frac{1}{t^2 - 1} dt$$
$$\int -3x\sqrt{x+1} \text{ subst. } t = \sqrt{x+1} \rightarrow \int -3x\sqrt{x+1} dx = 2\sqrt{(x+1)^3} - \frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5}$$
$$\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$$
$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$
$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos x dx$$

Příklady

1. Zdroj:

Obyčejné diferenciální rovnice - studijní text pro cvičení v předmětu Matematika - 2. E.
Nováková, M. Hyánková a L. Průcha

https://mat.fsv.cvut.cz/sibrava/Vyuka/dif_rov.pdf

$$(a) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \qquad (d) y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$$
$$(b) y'' + y = \frac{1}{\sin x}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (e) y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$$
$$(c) y'' + y = \operatorname{tg} x \qquad (f) y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Zkouškové příklady

$$2. (a) y'' + y = \sin^2 x \qquad (c) y''' + y' = \tan x$$
$$(b) y''' + y' = \frac{1}{\cos x}$$

Bonus

3. Najděte homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, jejíž fundamentální systém řešení tvoří funkce:

$$(a) e^x, e^{-2x} \qquad (d) e^{-5x}, xe^{-5x}$$
$$(b) \cos 3x, \sin 3x \qquad (e) \sin x, \cos 2x$$
$$(c) e^{2x} \sin(-x), e^{2x} \cos(-x)$$

4. Je funkce h lineární kombinací funkcí f a g ?

(ANO – NE) $h(x) = 4 + 3x$, $f(x) = (1 + x)^2$, $g(x) = 2 - x - 2x^2$

(ANO – NE) $h(x) = \sin(x + 2)$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

(ANO – NE) $h(x) = x^2$, $f(x) = (1 - x)^2$, $g(x) = (1 + x)^2$