25. cvičení – ODR vyššího řádu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Bernoulliho rovnice

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

Řešení: Jedná se o Bernoulliho rovnici

$$y' = xy - y^3 e^{-x^2},$$

kde $a(x) = x$, $b(x) = -e^{-x^2}$, $\alpha = 3$.

- Uvažujme $y > 0$. Použijeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Zřejmě $z > 0$. Pak $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$ a platí

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z'$$

Po dosazení do původní rovnice máme

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z' &= x\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z^3}} e^{-x^2} \\ -\frac{1}{2} z' &= xz - e^{-x^2} \\ z' &= -2xz + 2e^{-x^2} \end{aligned}$$

- Vyřešíme lineární rovnici. Homogenní rovnice

$$\begin{aligned} z' &= -2xz \\ \int \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z &= \int -2x \,\mathrm{d}x \\ \log|z| &= -x^2 + c \\ z &= ce^{-x^2}, \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Variace konstant:

$$\begin{aligned} c'e^{-x^2} + ce^{-x^2}(-2x) &= -2xce^{-x^2} + 2e^{-x^2} \\ c' &= 2 \\ c &= 2x + K \end{aligned}$$

Tedy řešení je ve tvaru

$$z = (2x + K)e^{-x^2}$$

- Protože $z > 0$, tak máme podmínku $x > -\frac{K}{2}$, $K \in \mathbb{R}$.
  Vyjádříme y:

$$y = \frac{1}{\sqrt{(2x+K)e^{-x^2}}}, \qquad x > -\frac{K}{2}.$$

- Uvažujme $y < 0$. Pak $y = -\frac{1}{\sqrt{z}}$ a platí

$$y' = -\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z'$$

Po dosazení do původní rovnice máme opět

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z' &= x\frac{-1}{\sqrt{z}} - \frac{-1}{\sqrt{z^3}} e^{-x^2} \\ z' &= -2xz + 2e^{-x^2} \end{aligned}$$

Řešením je tedy

$$y = -\frac{1}{\sqrt{(2x+K)e^{-x^2}}}, \qquad x > -\frac{K}{2}.$$

- Pro $y = 0$ máme stacionární řešení

$$y \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- Řešení nejdou nalepit, tedy závěr:

$$\begin{aligned} y &= \pm\frac{1}{\sqrt{(2x+K)e^{-x^2}}}, \qquad x > -\frac{K}{2}. \\ y &\equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) $xy^2y' = x^2 + y^3$
Řešení:

- Předpokládejme, že $x \neq 0$. Pak ani $y \neq 0$ (platilo by $0 = x^2$, což nelze). Pak lze rovnici upravit na

$$y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}$$

Jedná se o Bernoulliho rovnici kde $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = x$, $\alpha = -2$.

- Použijeme substituci $z = y^3$. Pak $y = \sqrt[3]{z}$ a

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}} z'$$

Po dosazení do původní rovnice máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}} z' &= \frac{x}{\sqrt[3]{z^2}} + \frac{\sqrt[3]{z}}{x} \\ z' &= 3x + \frac{3z}{x} \end{aligned}$$

- Vyřešíme lineární rovnici. Homogenní rovnice

$$\begin{aligned} z' &= \frac{3z}{x} \\ \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \\ \log|z| &= \log|x^3| + c \\ z &= cx^3, \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Variace konstant:

$$\begin{aligned} c'x^3 + c3x^2 + \frac{3cx^2}{x} &= 3x \\ c' &= \frac{3}{x^2} \\ c &= -\frac{3}{x} + K \end{aligned}$$

Tedy řešení je ve tvaru

$$z = -3x^2 + Kx^3, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

- Pak pro y máme

$$y = \sqrt[3]{-3x^2 + Kx^3}$$

Aby y bylo řešením, musí mít vlastní derivaci. Problémové body jsou tedy body, kde

$$\sqrt[3]{-3x^2 + Kx^3} = 0,$$

tedy $x = 0$ a $x = K/3$. Máme tedy řešení na intervalech

– pro $K > 0$ je $x \in (-\infty, 0)$, $(0, 3/K)$, $(3/K, \infty)$,

– pro $K < 0$ je $x \in (-\infty, 3/K)$, $(3/K, 0)$, $(0, \infty)$,

– pro $K = 0$ je $x \in (-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

Nalepit nelze.

(c) $y' + 2xy = 2xy^3$

Řešení:

Jedná se o Bernoulliho rovnici kde $a(x) = -2x$, $b(x) = 2x$, $\alpha = 3$.

- Uvažujme $y > 0$. Použijeme substituci $z = \frac{1}{y^2}$. Zřejmě $z > 0$. Pak $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$ a platí

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z'$$

Po dosazení do původní rovnice máme

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}} z' &= -\frac{2x}{\sqrt{z}} + \frac{2x}{\sqrt{z^3}} \\ z' &= 4xz - 4x \end{aligned}$$

- Vyřešíme lineární rovnici. Homogenní rovnice

$$\begin{aligned} z' &= 4xz \\ \int \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z &= \int 4x \,\mathrm{d}x \\ \log|z| &= 2x^2 + c \\ z &= ce^{2x^2}, \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Variace konstant:

$$\begin{aligned} c'e^{2x^2} + ce^{2x^2}(4x) &= 4xce^{2x^2} - 4x \\ c' &= -4xe^{-2x^2} \\ c &= e^{-2x^2} + K \end{aligned}$$

Tedy řešení je ve tvaru

$$z = 1 + Ke^{2x^2}$$

- Protože $z > 0$, dostaneme:
  - Pro $K \geq 0$ je $x \in \mathbb{R}$.
  - Pro $K \in (-1, 0)$ je $x \in (-\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{K}}, \sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{K}})$.
  - Pro $K \leq -1$ nemá řešení.

  Vyjádříme y:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + Ke^{2x^2}}},$$

- Uvažujme $y < 0$. Pak $y = -\frac{1}{\sqrt{z}}$ a platí

$$y' = -\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}}z'$$

  Po dosazení do původní rovnice máme opět

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{z^3}}z' = \frac{2x}{\sqrt{z}} - \frac{2x}{\sqrt{z^3}}$$
$$z' = 4xz - 4x$$

  Řešením je tedy

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + Ke^{2x^2}}},$$

  na stejných intervalech jako výše.
- Pro $y = 0$ máme stacionární řešení

$$y \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- Řešení nejdou nalepit, tedy závěr:

$$y \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

  a

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + Ke^{2x^2}}},$$

  - Pro $K \geq 0$ je $x \in \mathbb{R}$.
  - Pro $K \in (-1, 0)$ je $x \in (-\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{K}}, \sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{K}})$.
  - Pro $K \leq -1$ nemá řešení.

ODR vyššího řádu

2. Přiřaďte funkce ke tvaru $e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx))$:

(1) $12x^2 + 2x + 1$	(A) $e^{0x}(0\cos 1x + 1\sin 1x)$
(2) $\sin x$	(B) $e^{0x}((12x^2 + 2x + 1)\cos 0x + 0\sin 0x)$
(3) $8xe^x$	(C) $e^{2x}((-2)\cos 1x + 0\sin 1x)$
(4) $-2e^{2x}\cos x$	(D) $e^{1x}((8x)\cos 0x + 0\sin 0x)$

Řešení: 1B, 2A, 3D, 4C

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

   (a) $y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1$
   Zdroj: https://mat.fsv.cvut.cz/sibrava/Vyuka/dif_rov.pdf
   Řešení:

   - Řešení homogenní rovnice: Z rovnice
   $$y'' + y' - 6y = 0$$
   máme charakteristickou rovnici
   $$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$
   s kořeny $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$.
   Tedy řešení je
   $$y_H = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}.$$
   - Rovnice je se speciální pravou stranou
   $$12x^2 + 2x + 1 = e^{0x}((12x^2 + 2x + 1)\cos 0x + 0\sin 0x).$$
   Číslo $\mu + i\nu = 0 + 0i$ není kořenem charakteristické rovnice.
   Budeme tedy hledat řešení ve tvaru
   $$y_P = e^{0x}x^0((Ax^2+Bx+C))\cos(0x)+(Dx^2+Cx+E))\sin(0x) = Ax^2+Bx+C.$$
   Máme
   $$y_P' = 2Ax + B$$
   $$y_P'' = 2A$$
   Po dosazení do původní rovnice dostaneme
   $$2A + 2Ax + B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C = 12x^2 = 2x + 1.$$
   Odtud $A = -2$, $B = -1$, $C- = 1$. Tedy
   $$y_P = -2x^2 - x - 1$$

- Závěr
$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 - x - 1, \qquad c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$$

(b) $y'' - 3y' = 3x - 1$
Zdroj: https://mat.fsv.cvut.cz/sibrava/Vyuka/dif_rov.pdf
Řešení:

- Řešení homogenní rovnice: Z rovnice
$$y'' - 3y' = 0$$
máme charakteristickou rovnici
$$\lambda^2 - 3\lambda = 0,$$
s kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$.
Tedy řešení je
$$y_H = c_1 e^{3x} + c_2 e^{0x}. = c_1 e^{3x} + c_2.$$
- Rovnice je se speciální pravou stranou
$$3x - 1 = e^{0x}((3x - 1)\cos 0x + 0 \sin 0x)$$
Číslo $\mu + i\nu = 0 + 0i$ je 1-násobným kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru
$$y_P = e^{0x} x^1((Ax + B))\cos(0x) + (Dx + C))\sin(0x) = Ax^2 + Bx.$$
Máme
$$y_P' = 2Ax + B$$
$$y_P'' = 2A$$
Po dosazení do původní rovnice dostaneme
$$2A - 6Ax - 3B = 3x - 1$$
Odtud $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Tedy
$$y_P = -\frac{1}{2}x^2$$
- Závěr
$$y = c_1 e^{3x} + c_2 - \frac{1}{2}x^2, \qquad c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$$

(c) $y'' + 2y' + 5y = 8xe^x$
Zdroj: https://mat.fsv.cvut.cz/sibrava/Vyuka/dif_rov.pdf
Řešení:

- Řešení homogenní rovnice: Z rovnice
$$y'' + 2y' + 5y = 0$$
máme charakteristickou rovnici
$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$
s kořeny $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$.
Tedy řešení je
$$y_H = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\sin(2x).$$

- Rovnice je se speciální pravou stranou

$$8xe^x = e^{1x}((8x)\cos 0x + 0\sin 0x)$$

Číslo $\mu + i\nu = 1 + 0i$ není kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru

$$y_P = e^x x^0((Ax+B))\cos(0x) + (Dx+C))\sin(0x) = e^x(Ax+B)$$

Máme

$$y_P' = e^x(Ax + A + B)$$
$$y_P'' = e^x(Ax + 2A + B)$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$e^x(Ax+2A+B) + 2e^x(Ax+A+B) + 5e^x(Ax+B) = 8xe^x$$

Odtud $A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$. Tedy

$$y_P = e^x(x - \frac{1}{2})$$

- Závěr

$$y = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\sin(2x) + e^x(x - \frac{1}{2}) \qquad c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$$

(d) $y'' + y = x + \sin x$
Zdroj: https://mat.fsv.cvut.cz/sibrava/Vyuka/dif_rov.pdf
Řešení:

- Řešení homogenní rovnice: Z rovnice

$$y'' + y = 0$$

máme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

s kořeny $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. (Pozor na častou záměnu, rovnice NEMÁ tvar $\lambda^2 + \lambda = 0$.)
Tedy řešení je

$$y_H = c_1\sin x + c_2\cos x.$$

- Pravá strana není ve speciálním tvaru. Budeme tedy řešit dvě rovnice

$$y'' + y = x$$
$$y'' + y = \sin x$$

jejichž řešení pak sečteme.

- Nejprve rovnice $y'' + y = x$.

$$x = e^{0x}((x)\cos 0x + 0 \sin 0x).$$

Číslo $\mu + i\nu = 0 + 0i$ není kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru

$$y_{P1} = Ax + B$$

Máme

$$y_P' = A$$
$$y_P'' = 0$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$0 + Ax + B = x$$

Odtud $A = 1$, $B = 0$. Tedy

$$y_{P1} = x.$$

- Dále rovnice $y'' + y = \sin x$.

$$\sin x = e^{0x}(0\cos(1x) + 1\sin(1x)).$$

Číslo $\mu + i\nu = 0 + 1i$ je kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru

$$y_{P2} = x(A\cos x + B\sin x).$$

Máme

$$y_P' = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$$
$$y_P'' = (-Ax + 2B)\cos x + (-2A - Bx)\sin x$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(-Ax + 2B)\cos x + (-2A - Bx)\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = 1\sin x$$

Odtud $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Tedy

$$y_{P2} = -\frac{1}{2}x\cos x.$$

- Závěr

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x - \frac{1}{2}x\cos x \qquad c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$$

(e) $y'' - 4y' + 5y = -2e^{2x}\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Řešení:

- Řešení homogenní rovnice: Z rovnice

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

máme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

s kořeny $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$.
Tedy řešení je

$$y_H = c_1 e^{2x}\sin x + c_2 e^{2x}\cos x.$$

- Rovnice je se speciální pravou stranou

$$-2e^{2x}\cos x = e^{2x}((-2)\cos 1x + 0\sin 1x).$$

Číslo $\mu + i\nu = 2 + 1i$ je kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru

$$y_P = e^{2x}x^1(A\cos(1x) + B\sin(1x))$$

Máme

$$\begin{aligned} y_P' &= e^{2x}(\sin x(-Ax + 2Bx + B) + \cos x(2Ax + A + Bx)) \\ y_P'' &= e^{2x}(\sin x(3Bx + 4B - 4Ax - 2A) + \cos x(3Ax + 4A + 4Bx + 2B)) \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$e^{2x}(-2A\sin x + (2B - 8Ax)\cos x) = -2e^{2x}\cos x$$

Odtud $A = 0$, $B = -1$. Tedy

$$y_P = xe^{2x}(-\sin x)$$

- Závěr

$$y = c_1e^{2x}\sin x + c_2e^{2x}\cos x + xe^{2x}(-\sin x) \qquad c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$$

- Počáteční podmínky:

$$1 = y(0) = c_1e^0\sin 0 + c_2e^0\cos 0 - 0e^0\sin 0.$$

Tedy $c_2 = 1$. Dále

$$\begin{aligned} y' = {}& c_1 2e^{2x}\sin x + c_1e^{2x}\cos x + c_2 2e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}(-\sin x) \\ &+ e^{2x}(-\sin x) + x(2e^{2x}(-\sin x) + e^{2x}(-\cos x)) \end{aligned}$$

Tedy

$$0 = y'(0) = c_1 + 2\cdot 1$$

Tedy $c_1 = -2$.
Řešením je tedy funkce

$$y = -2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x + xe^{2x}(-\sin x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y''' + y'' + y' + y = 8xe^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$
Řešení:

- Řešení homogenní rovnice: Z rovnice

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

máme charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

s kořeny $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$.
Uhodneme řešení $\lambda_1 = -1$. Pak rozložíme na

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$$

tedy kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$.
Tedy řešení je

$$y_H = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

- Rovnice je se speciální pravou stranou

$$8xe^x = e^{1x}((8x)\cos 0x + 0 \sin 0x).$$

Číslo $\mu + i\nu = 0 + 0i$ není kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru

$$y_P = e^{1x}((Ax + B)\cos(0x) + 0\sin(0x)) = e^x(Ax + B)$$

Máme

$$\begin{aligned} y_P' &= e^x(Ax + A + B) \\ y_P'' &= e^x(Ax + 2A + B) \\ y_P''' &= e^x(Ax + 3A + B) \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$e^x(Ax + 3A + B + Ax + 2A + B + Ax + A + B + Ax + B) = 8xe^x$$

Odtud $A = 2$, $B = -3$. Tedy

$$y_P = e^x(2x - 3)$$

- Závěr

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + e^x(2x - 3) \qquad c_1, c_2, c_3, x \in \mathbb{R}$$

- Počáteční podmínky: Prve zderivujme

$$\begin{aligned} y' &= -c_1 e^{-x} - c_2 \sin x + c_3 \cos x + e^x(2x - 1) \\ y'' &= c_1 e^{-x} - c_2 \cos x - c_3 \sin x + e^x(2x + 1) \end{aligned}$$

Po dosazení

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_1 + c_2 - 3 \\ 1 &= y'(0) = -c_1 + c_3 - 1 \\ 1 &= y''(0) = c_1 - c_2 + 1 \end{aligned}$$

Odtud $c_1 = 2$, $c_2 = 2$, $c_3 = 4$.
Řešením je tedy funkce

$$y = 2e^{-x} + 2\cos x + 4\sin x + e^x(2x - 3) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(b) $y^{iv} + 8y'' + 16y = 64x \sin 2x$

Řešení:

- Řešení homogenní rovnice: Z rovnice

$$y^{iv} + 8y'' + 16y = 0$$

máme charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 &= 0 \\ (\lambda^2 + 4)^2 &= 0 \end{aligned}$$

s dvojnásobnými kořeny $\lambda_{1,2} = 2i$, $\lambda_{3,4} = -2i$.
Tedy řešení je

$$y_H = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + c_3 x \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$$

- Rovnice je se speciální pravou stranou

$$64x \sin(2x) = e^{0x}((0) \cos 2x + 64x \sin 2x).$$

Číslo $\mu + i\nu = 0 + 2i$ je 2-násobným kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru

$$y_P = x^2((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x)$$

Máme

$$\begin{aligned} y_P' &= (2Cx^3 + 2Dx^2 + 3Ax^2 + 2Bx) \cos 2x + (-2Ax^3 + 3Cx^2 - 2Bx^2 + 2Dx) \sin 2x \\ y_P'' &= (-4Ax^3 + 6Ax - 4Bx^2 + 2B + 12Cx^2 + 8Dx) \cos 2x \\ &\quad + (-12Ax^2 - 8Bx - 4Cx^3 + 6Cx - 4Dx^2 + 2D) \sin 2x \\ y_P''' &= -2(18Ax^2 - 3A + 12Bx + 4Cx^3 - 18Cx + 4Dx^2 - 6D) \cos(2x) \\ &\quad + 2(4Ax^3 - 18Ax + B(4x^2 - 6) - 18Cx^2 + 3C - 12Dx) \sin(2x) \\ y_P^{iv} &= (Ax^3 - 9Ax + x^2(B - 6C) - 3B + 3C - 4Dx)) \cos(2x) \\ &\quad + 16((x^2(6A + D) - 3(A + D) + x(4B - 9C) + Cx^3) \sin(2x) \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(-32B + 48C - 96Ax) \cos 2x + (-48A - 32D - 96Cx) \sin 2x = 64x \sin(2x)$$

Odtud $A = 0$, $B = -1$, $C = -\frac{2}{3}$, $D = 0$. Tedy

$$y_P = x^2 \left(- \cos 2x - \frac{2}{3} x \sin x \right)$$

- Závěr

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + c_3 x \cos(2x) + c_4 \sin(2x) + x^2 \left(- \cos 2x - \frac{2}{3} x \sin x \right)$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, x \in \mathbb{R}$$

(c) $y''' - 2y' + 4y = xe^{-2x}$

Řešení:

- Řešení homogenní rovnice: Z rovnice

$$y''' - 2y' + 4y = 0$$

máme charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 - 2\lambda + 4 = 0,$$

s kořeny $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$.
Uhodneme řešení $\lambda_1 = -2$. Pak rozložíme na

$$\lambda^3 - 2\lambda + 4 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

tedy kořeny jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$.
Tedy řešení je

$$y_H = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x.$$

- Rovnice je se speciální pravou stranou

$$xe^{-2x} = e^{-2x}((x)\cos 0x + 0 \sin 0x).$$

Číslo $\mu + i\nu = -2 + 0i$ je kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru

$$y_P = e^{-2x}x((Ax + B)\cos(0x) + 0\sin(0x)) = e^{-2x}x(Ax + B)$$

Máme

$$\begin{aligned} y_P' &= -e^{-2x}(2Ax^2 - 2Ax + 2Bx - B) \\ y_P'' &= 2e^{-2x}(2Ax^2 - 4Ax + A + 2Bx - 2B) \\ y_P''' &= -4e^{-2x}(A(2(x-3)x + 3) + B(2x - 3)) \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$e^{-2x}(20Ax - 12A + 10B) = xe^{-2x}$$

Odtud $A = 1/20$, $B = 3/50$. Tedy

$$y_P = e^{-2x}\left(\frac{x^2}{20} + \frac{3x}{50}\right)$$

- Závěr

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x + e^{-2x}\left(\frac{x^2}{20} + \frac{3x}{50}\right) \qquad c_1, c_2, c_3, x \in \mathbb{R}$$

(d) $y''' - 4y'' + 4y' = 2x + e^{2x} - \cos 2x$

Řešení:

- Řešení homogenní rovnice: Z rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

máme charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0, \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0,$$

s kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 2$.
Tedy řešení je

$$y_H = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}$$

- Rovnice je součtem speciálních pravých stran. Uvažujme nejprve

$$2x = e^{0x}((2x)\cos 0x + 0 \sin 0x).$$

Číslo $\mu + i\nu = 0 + 0i$ je kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru

$$y_{P1} = e^{0x} x((Ax + B)\cos(0x) + 0\sin(0x)) = (Ax^2 + Bx)$$

Máme

$$y'_{P1} = 2Ax + B$$
$$y''_{P1} = 2A$$
$$y'''_{P1} = 0.$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$0 - 8A + 8Ax + 4B = 2x$$

Odtud $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$. Tedy

$$y_{P1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

- Dále

$$e^{2x} = e^{2x}(1 \cos 0x + 0 \sin 0x).$$

Číslo $\mu + i\nu = 2 + 0i$ je 2-násobným kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru

$$y_{P2} = e^{2x} x^2 (A\cos(0x) + 0\sin(0x)) = e^{2x} x^2 A$$

Máme

$$y'_{P2} = 2A(x^2 + x)e^{2x}$$
$$y''_{P2} = 2A(2x^2 + 4x + 1)e^{2x}$$
$$y'''_{P2} = 4A(2x^2 + 6x + 3)e^{2x}$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$e^{2x}(4A(2x^2 + 6x + 3) - 8A(2x^2 + 4x + 1) + 8A(x^2 + x)) = e^{2x}$$

Odtud $A = \frac{1}{4}$. Tedy

$$y_{P2} = \frac{1}{4}x^2 e^{2x}$$

- Dále
$$\cos 2x = e^{0x}(1\cos 2x + 0\sin 2x).$$
Číslo $\mu + i\nu = 0 + 2i$ není kořenem charakteristické rovnice.
Budeme tedy hledat řešení ve tvaru
$$y_{P3} = e^{0x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) = A\cos 2x + B\sin 2x$$
Máme
$$\begin{aligned} y'_{P3} &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \\ y''_{P3} &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \\ y'''_{P3} &= 8A\sin 2x - 8B\cos 2x. \end{aligned}$$
Po dosazení do původní rovnice dostaneme
$$16B\sin 2x + 16A\cos 2x = \cos 2x.$$
Odtud $A = \frac{1}{16}$, $B = 0$. Tedy
$$y_{P3} = \frac{1}{16}\cos 2x.$$
- Závěr
$$y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2e^{2x} + \frac{1}{16}\cos 2x \qquad c_1, c_2, c_3, x \in \mathbb{R}$$

5. V jakém tvaru budete hledat řešení?

(1) $y''' + y'' + y = e^x$
Ae^x

(2) $y''' + y'' - 2y = (x+1)e^x$
$x(Ax + B)e^x$

(3) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$
Ax^3e^{-x}

(4) $y''' + y'' = x^3 + x^2$
$x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$

(5) $y'' + y' + y = e^x\cos x$
$e^x(A\cos x + B\sin x)$

(6) $y'' - y' + y = \cos x - \sin x$
$A\cos x + B\sin x$

(7) $y''' - 2y'' + 5y' = 2e^x\sin 2x$
$xe^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Zkouškové příklady

6. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y^{(4)} - y = x^2$

(b) $y^{(4)} - 10y'' + 25y = 1 + \sin x$

(c) $y''' + 2y'' + y' + 2y = xe^x$

(d) $y''' + 4y'' + y' - 6y = 10x\sin x$

(e) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = \sin x + x\cos x$

(5a) $y^{(4)} - y = x^2$

- $\lambda^4 - 1 = 0$

$(\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = 0$

$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 0+1i$

$\lambda_4 = 0-1i$

$y_H = e^x \cdot c_1 + c_2 e^{-x}$

$+ c_3 e^{0x} \cos 1x + c_4 e^{0x} \sin 1x$

$= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

$c_{1-4}, x \in \mathbb{R}$

- PS $\quad x^2 = e^{0x}(x^2 \cos 0x + 0 \sin 0x)$

$0+0i$ není kořen $\quad$ max st $= 2$

$y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

$y_p''' = y_p^{IV} = 0$

dosazení

$0 - (Ax^2+Bx+C) = 1x^2 + 0x + 0$

$\rightarrow A = -1 \qquad B = 0 = C$

$y_p = -x^2$

$y = y_H + y_p$

(5b) $y^{(4)} - 10y'' + 25y = 1 + \sin x$

- $\lambda^4 - 10\lambda^2 + 25 = 0$

$(\lambda^2 - 5)^2 = 0$

$(\lambda - \sqrt{5})^2(\lambda + \sqrt{5})^2 = 0$

2-násob. $\lambda_1 = \sqrt{5}$

2-násob. $\lambda_2 = -\sqrt{5}$

$y_H = C_1 e^{x\sqrt{5}} + C_2 x e^{x\sqrt{5}} + C_3 e^{-x\sqrt{5}} + C_4 x e^{+\sqrt{5}}$

- je treba to rozdeliť:
- $PS = 1$ $\qquad 1 = e^{0x}(1 \cdot \cos 0x + 0 \cdot \sin 0x)$

$0 + 0i$ není kořen

max náš $= 0$

$y_{p_1} = A$

$y'_{p_1} = 0$

pak $\quad 25A = 1 \qquad A = 1/25 \qquad \underline{y_{p_1} = \frac{1}{25}}$

- $PS = \sin x$ $\qquad \sin x = e^{0x}(0 \cos x + 1 \cdot \sin x)$

$0 + 1i$ není kořen

$y_{p_2} = A \cos x + B \sin x$

$y'_{p_2} = -A \sin x + B \cos x$

$y''_{p_2} = -A \cos x - B \sin x$

$y'''_{p_2} = A \sin x - B \cos x$

$y^{(4)}_{p_2} = A \cos x + B \sin x$

dosazení: $\cos x\,[A + 10A + 25A]$
$+ \sin x\,[B + 10B + 25B] = 1 \sin x + 0 \cos x$

$\to A = 0 \qquad B = 1/36 \qquad y_{p_2} = \frac{1}{36} \sin x$

celkem $\quad \underline{y = y_H + y_{p_1}} + y_{p_2} \qquad x, C_{1-4} \in \mathbb{R}$

(5c)

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = xe^x$$

- $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

$y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

$\lambda_1 = -2$ dělení polynomů:

$(\lambda+2)(\lambda^2+1) = 0$

$(\lambda+2)(\lambda+i)(\lambda-i) = 0$

$\lambda_1 = -2$ $\quad \lambda_2 = 0 + 1i$

$\lambda_3 = 0 - 1i$

- PS $\quad xe^x = e^{1x}(x \cos 0x + 0 \sin 0x)$

$1 + 0i$ není kořen $\quad st = 1$

$y_p = (Ax+B)e^x$

$y_p' = e^x(A + Ax + B)$

$y_p'' = e^x(2A + Ax + B)$

$y_p''' = e^x(3A + Ax + B)$

dosazení:

$$e^x[3A + Ax + B + 4A + 2Ax + 2B + A + Ax + B + 2Ax + 2B] = 1xe^x$$

$$e^x[8A + 6Ax + 6B] = 1xe^x$$

$$A = 1/6$$

$8A + 6B = 0 \qquad 6B = -\frac{8}{6} \qquad B = -\frac{2}{9}$

$y_p = \left(\frac{x}{6} - \frac{2}{9}\right)e^x$

$y = y_H + y_p$

(5a) $y''' + 4y'' + y' - 6y = 10x \sin x$

- $\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ $\qquad y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$

$\lambda = 1$ dělení polynomů

$\rightarrow \quad (\lambda - 1)(x+2)(x+3) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -3$

- Ps: $\quad 10x \sin x = e^{0x}(0 \cos x + 10x \sin 1x)$

$0 + i$ není kořen

$st = 1$

$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$

$y_p' = \cos x\,(A + Cx + D) + \sin x\,(C - Ax - B)$

$y_p'' = \cos x\,(-Ax - B + 2C) + \sin x\,(-Cx - 2A - D)$

$y_p''' = \cos x\,(-Cx - 3A - D) + \sin x\,(Ax + B - 3C)$

dosazení:

$\cos x\,[-\cancel{Cx} - 3A - \cancel{D} - 4Ax - 4B + 8C + A + \cancel{Cx} + \cancel{D} - 6Ax - 6B]$
$+ \sin x\,[\cancel{Ax} + \cancel{B} - 3C - 4Cx - 8A - 4D + C - \cancel{Ax} - \cancel{B} - 6Cx - 6D] = 10x \sin x$

$\cos x: \quad -3A - 4B + 8C - 6B + A = 0 \qquad -10B - 8 = 0 \qquad B = \frac{-4}{5}$

$x \cos x: \quad -4A - 6A = 0 \qquad \rightarrow A = 0$

$\sin x: \quad -3C - 8A - 4D + C - 6D = 0 \qquad -10D + 2 = 0$

$x \sin x \quad -4C - 6C = 10 \quad \rightarrow C = -1 \qquad D = \frac{1}{5}$

$y_p = -\frac{4}{5}\cos x + (-x + \frac{1}{5})\sin x$

$y = y_h + y_p$

(5e)

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' = \sin x + x\cos x$$

• $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$\lambda^2(\lambda - 1)^2 = 0$

2-náš. $\lambda_1 = 0$

2-náš. $\lambda_2 = 1$

$y_H = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{1x} + c_4 x e^{1x}$

$y_H = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x$, $x \in \mathbb{R}$

• PŠ: $\sin x + x\cos x = e^{0x}(x\cdot\cos 1x + 1\cdot\sin 1x)$

číslo $0 + 1i$ není kořen

st. polynomů - max 1

$y_P = e^{0x}((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x)$ pomohla jsem si programem

$y_P' = \cos x(A + Cx + D) + \sin x(C - Ax - B)$

$y_P'' = \cos x(-Ax - B + 2C) + \sin x(-Cx - 2A - D)$

$y_P''' = \cos x(-Cx - 3A - D) + \sin x(Ax + B - 3C)$

$y_P^{iv} = \cos x(Ax + B - 4C) + \sin x(Cx + 4A + D)$

dosazení:

$\cos x[Ax + B - 4C] + \sin x[Cx + 4A + D] - 2\cos x[-Cx - 3A - D] - 2\sin x \cdot [Ax + B - 3C] + \cos x[-Ax - B + 2C] + \sin x[-Cx - 2A - D] = \sin x + x\cos x$

$x\cos x[\cancel{A} + 2C - \cancel{A}] + x\sin x[\cancel{C} - 2A - \cancel{C}]$

$+ \cos x[\cancel{B} - 4C + 6A + 2D - \cancel{B} + 2C] + \sin x[4A + \cancel{D} - 2B + 6C - 2A - \cancel{D}]$

$= 1x\cos x + 0x\sin x + 0\cos x + 1\sin x$

(5e)

$2C = 1 \qquad -2C + 6A + 2D = 0$

$-2A = 0 \qquad 2A - 2B + 6C = 1$

$C = \frac{1}{2} \quad A = 0 \quad \longrightarrow \quad -1 + 2D = 0 \quad \rightarrow \quad D = \frac{1}{2}$

$-2B + 3 = 1 \qquad B = 1$

$y_p = \cos x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\sin x$

$y = y_h + y_p \qquad x \in \mathbb{R}$

$c_{1-4} \in \mathbb{R}$

$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + \underline{c_4 x e^x} + \cos x + \frac{1}{2}\sin x\,(x+1)$

Bonus

7. Najděte řešení ODR
   (a) $y'' = -y$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$
   Řešení: Obecné řešení je $y = A\sin x + B\cos x$. Z počátečních podmínek pak máme $y = \sin x$.
   (b) $y'' = -y$, $y(0) = 2, y'(0) = -3$
   Řešení: $y = -3\sin x + 2\cos x$.
   (c) $y'' = -y$, $y(0) = 0, y'(\pi) = 0$
   Řešení: $y = 0$.
   (d) $y'' = -y$, $y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$
   Řešení: $y = A\sin x$, $A \in \mathbb{R}$.
8. V závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$ najděte FSŘ diferenciální rovnice
$$y'' + ry = 0.$$
9. V závislosti na konstantách $p, q > 0$ najděte FSŘ diferenciální rovnice
$$y'' + 2py' + q^2y = 0.$$

9. Diferenciální rovnice $t^2x'' + 3tx' + 2x = 0$ má řešení tvaru $x(t) = t^n$, kde n je konstanta. Najděte její fundamentální systém řešení.

Řešení:

Daná rovnice je homogenní lineární diferenciální druhého řádu. Fundamentální systém řešení se tedy skládá ze dvou nezávislých řešení. Protože je to rovnice Eulerova typu, předpokládáme řešení ve tvaru $x(t) = t^n$. Po dosazení předpokládaného řešení do diferenciální rovnice, dostaneme pro n charakteristickou rovnici

$$n(n-1) + 3n + 2 = n^2 + 2n + 2 = 0 \Longrightarrow n_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}\,.$$

Pro $t > 0$ má tedy rovnice komplexní fundamentální systém řešení

$$x_1(t) = t^{-1+\mathrm{i}} = t^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln t} = \frac{\cos(\ln t) + \mathrm{i}\sin(\ln t)}{t}$$
$$x_2(t) = t^{-1-\mathrm{i}} = t^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln t} = \frac{\cos(\ln t) - \mathrm{i}\sin(\ln t)}{t}\,.$$

Je zvykem volit reálný fundamentální systém řešení

$$x_1(t) = \frac{\cos(\ln t)}{t} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \frac{\sin(\ln t)}{t}\,,$$

který je lineární kombinace komplexního fundamentálního systému řešení.

(8)

10. V závislosti na konstantách $p, q > 0$ a q najděte fundamentální systém řešení diferenciální rovnice $x'' + 2px' + q^2x = 0$ (*volné tlumené kmity*).

Řešení:

Daná rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2p\lambda + q^2 = 0$ má řešení

$$\lambda_\pm = -p \pm \sqrt{p^2 - q^2}\,. \tag{1}$$

Fundamentální systém řešení závisí na hodnotě diskriminantu $p^2 - q^2$ rovnici (1).

1) Je-li diskriminant $p^2 - q^2 = r^2 > 0$ je fundamentální systém řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{-(p-r)t}$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-(p+r)t}$. Obecné řešení

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-(p-r)t} + C_2\mathrm{e}^{-(p+r)t}$$

je klesající (protože $p > r$) a jeho limita pro $t \to +\infty$ je rovna nule.

Řešení, které splňuje počáteční podmínky $x(0) = x_0$ a $x'(0) = v_0$ je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\left(x_0\cosh rt + \frac{v_0 + px_0}{r}\sinh rt\right).$$

Toto řešení, pokud není nulové, má tu vlastnost, že může pouze jednou procházet bodem $x = 0$. To nastane v čase $t > 0$, pro který platí rovnost

$$x_0\cosh rt + \frac{v_0 + (p-r)x_0}{r}\sinh rt = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{2r}\ln\frac{v_0 + (p-r)x_0}{v_0 + (p+r)x_0}$$

Takový pohyb se nazývá *aperiodický*.

(8) 2) Je-li diskriminant $p^2 - q^2 = 0$ je fundamentální systém řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{-pt}$ a $x_2(t) = t\mathrm{e}^{-pt}$. Obecné řešení

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-pt} + C_2 t\mathrm{e}^{-pt}$$

má v podstatě stejné vlastnosti jako v případě 1). Řešení s danými počátečními podmínkami je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\big(x_0 + (v_0 + px_0)t\big)\,,$$

které může opět procházet pouze jednou bodem $x = 0$. Takový pohyb se nazývá také aperiodický (ale nejsem si příliš jist, zda nemá nějaký přívlastek).

3) Je-li diskriminant $p^2 - q^2 = -\omega^2 < 0$, $\omega > 0$, je fundamentální systém řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t$. Obecné řešení

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\big(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\big)$$

prochází bodem $x = 0$ pro $t > 0$ nekonečněkrát. Řešení, které splňuje počáteční podmínky je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\left(x_0\cos\omega t + \frac{v_0 + px_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Tento pohyb můžeme považovat za vlnění s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{q^2 - p^2} = q\sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}}\,,$$

jehož amplituda A je klesající funkcí času, $A(t) = A_0\mathrm{e}^{-pt}$. V případě, že je *konstanta tlumení* p malá vzhledem k úhlové frekvenci volných netlumených kmitů q, se během jednoho kmitu, tj. za půlperiodu $\dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\sqrt{q^2 - p^2}}$ amplituda změní $\mathrm{e}^{-\frac{p\pi}{\sqrt{q^2-p^2}}}$–krát. Logaritmus tohoto výrazu s opačným znaménkem, tj. $\dfrac{p\pi}{\sqrt{q^2 - p^2}}$ se nazývá *logaritmický dekrement* kmitavého pohybu.

---

(7) **11.** V závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení diferenciální rovnice $x'' + rx = 0$, které splňují podmínky: a) $x(0) = 0$, $x'(1) = 1$; b) $x(0) = 0$, $x'(1) = 0$.

Řešení: Tato úloha se liší od všech předešlých úloh tím, že jsou podmínky na řešení dány ve dvou různých bodech. Takové podmínky se nazývají *okrajové podmínky* a úloha najít řešení diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami *okrajová úloha* pro diferenciální rovnici. Řešit okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici je zcela jiný, a zpravidla složitější, problém než najít řešení diferenciální rovnice s počátečními podmínkami.

1) Pro $r < 0$ je obecné řešení diferenciální rovnice

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{r}t} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{r}t}\,.$$

Z okrajových podmínek dostaneme pro konstanty C_1 a C_2 soustavu rovnic

$$C_1 + C_2 = 0\,,\quad \sqrt{r}\big(C_1\mathrm{e}^{\sqrt{r}} - C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{r}}\big) = \epsilon\,,$$

kde $\epsilon = 1$ v případě a), resp. $\epsilon = 0$ v případě b). Tedy v případě a) je $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{r}\cosh\sqrt{r}}$ a řešení rovnice je

$$x(t) = \frac{\sinh\sqrt{r}t}{\sqrt{r}\cosh\sqrt{r}}\,.$$

V případě b) je $C_1 = C_2 = 0$ a daná rovnice má pouze nulové řešení.

(7)

2) Pro $r = 0$ je obecné řešení rovno $x(t) = C_1 + C_2 t$. Z okrajových podmínek pak plyne, že v případě a) je řešení $x(t) = t$ a v případě b) dostáváme opět nulové řešení $x(t) = 0$.

3) Pro $r > 0$ je obecné řešení rovno

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{r} t + C_2 \sin \sqrt{r} t\,.$$

Z okrajových podmínek dostaneme pro konstanty C_1 a C_2 soustavu rovnic

$$C_1 = 0\,, \quad \sqrt{r} C_2 \cos \sqrt{r} = \epsilon\,.$$

Tedy je-li $r \neq \left(\dfrac{2k+1}{2}\pi\right)^2$, má rovnice v případě a) řešení $x(t) = \dfrac{\sin \sqrt{r} t}{\sqrt{r} \cos \sqrt{r}}$ a v případě b) pouze nulové řešení $x(t) = 0$.

Ale je-li $r = \left(\dfrac{2k+1}{2}\pi\right)^2$, nemá rovnice v případě a) žádné řešení, ale v případě b) dostáváme množinu řešení $x(t) = C \sin \sqrt{r} t$, kde C je libovolná konstanta.

Poznámka. Hlavní rozdíl mezi oběma případy spočívá v tom, že úloha v případě a) nemá tu vlastnost, že lineární kombinace řešení je opět řešení, což mají homogenní lineární rovnice, kdežto úloha v případě b) tuto vlastnost má. Tedy z tohoto hlediska není úloha v tomto případě homogenní. Pokud bychom zavedli v případě a) novou proměnnou $y(t) = x(t) - t$ získali bychom nehomogenní rovnici $y'' + ry = rt$, jejíž řešení by vyhovovalo okrajovým podmínkám $y(0) = y'(0) = 0$. Je to vlastně nehomogenní úloha pro případ b), který lze považovat za příslušnou homogenní úlohu. Podrobnější analýzou tohoto příkladu bychom mohli ukázat, že "homogenní" rovnice (případ b) má pouze nulové řešení právě tehdy, když existuje právě jedno řešení "nehomogenní" rovnice (případ a) pro každou pravou stranu, tj. hodnotu $x'(1)$ (*Fredholmova alternativa*).
Tuto větu byste měli znát s teorie soustav lineárních algebraických rovnic a platí i v mnohem obecnějších případech.

---

12. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x''' = \sqrt{1 + (x'')^2}\,. \tag{1}$$

Řešení: Protože diferenciální rovnice (1) neobsahuje proměnné x a x', zavedeme novou proměnnou $y(t) = x''(t)$. Z rovnice (1) dostaneme pro tu funkci diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = \sqrt{1 + y^2}\,,$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Standardním postupem získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = \int \mathrm{d}t \Longrightarrow \operatorname{argsinh} y = t + C_1 \Longrightarrow y(t) = \sinh(t + C_1)\,.$$

Protože $y = x''$, dostaneme dvojnásobnou integrací obecné řešení diferenciální rovnice (1) ve tvaru

$$x(t) = \sinh\bigl(t + C_1\bigr) + C_2 t + C_3\,,$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty.

---

13. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x\bigl(1 - \ln x\bigr)x'' + \bigl(1 + \ln x\bigr) \cdot \bigl(x'\bigr)^2 = 0\,. \tag{1}$$

Řešení: Protože diferenciální rovnice (1) neobsahuje explicitně nezávisle proměnnou t, zavedeme novou proměnnou $p(x)$ rovnicí $p(x) = x'$. Protože pak platí $x'' = pp'$, získáme z rovnice (1) vztah

$$p\Bigl(x\bigl(1 - \ln x\bigr)p' + \bigl(1 + \ln x\bigr)p\Bigr) = 0\,. \tag{2}$$

10. Proč se malé dítě na pružinové houpačce (zvířátko na pružině) houpe rychleji než dospělý? Pohyb je popsán rovnicí $my'' + ky = 0$, kde m je hmotnost houpajícího se člověka a k charakterizuje pružinu.

    Zdroj: https://user.mendelu.cz/marik/aplikace/aplikace_diferencialnich_rovnic.pdf

    Řešení: Vyřešíme diferenciální rovnici. Charakteristická rovnice:

$$m\lambda^2 + k = 0$$

    má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Řešením je tedy funkce

$$y = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}x + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}x$$

    Tedy s rostoucí hmotností m klesá frekvence kmitů $\sqrt{\frac{k}{m}}$.