24. cvičení – Lineární ODR (Variace konstant)

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic

   (a) $y' + y = e^x$

   Řešení:

   - Máme funkce $p(x) = 1$, $q(x) = e^x$. Jsou spojité na $(a, b) = (-\infty, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
   - Vyřešíme homogenní rovnici
   $$y' + y = 0$$
   Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a, b)$.
   Dále na intervalech $(a, b) = \mathbb{R}$, $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme
   $$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -1\,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= -x + c \\ |y| &= e^{-x+c} \\ |y| &= e^c e^{-x} \\ y &= \pm e^c e^{-x} \end{aligned}$$
   Spolu se stacionárním řešením lze psát
   $$y = ce^{-x}, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a, b).$$
   - Variace konstant. Máme
   $$y' = c'e^{-x} - ce^{-x}$$
   Dosadíme do původní rovnice
   $$\begin{aligned} c'e^{-x} - ce^{-x} + ce^{-x} &= e^x \\ c'e^{-x} &= e^x \\ c' &= e^{2x} \\ c &= \frac{1}{2}e^{2x} + K \end{aligned}$$
   - Závěr:
   $$y = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + K\right) e^{-x}, x \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

   (b) ❄ $xy' - y = x^2$

   Řešení:

   - Pro původní rovnici je $x \in \mathbb{R}$. Převedeme na lineární rovnici:
   $$y' - \frac{y}{x} = x.$$
   Dále řešíme pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.

- Vyřešíme homogenní rovnici
$$y' - \frac{y}{x} = 0$$
Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.
Dále na intervalech $(a, b) = (-\infty, 0)$ (resp. $(a, b) = (0, \infty)$), $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme
$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y &= \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \\ \log|y| &= \log|x| + c \\ |y| &= e^{\log|x| + c} \\ |y| &= e^c|x| \\ y &= \pm e^c|x| \end{aligned}$$
Spolu se stacionárním řešením lze psát
$$\begin{aligned} y = cx, &\qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (-\infty, 0), \\ y = dx, &\qquad d \in \mathbb{R},\ x \in (0, \infty) \end{aligned}$$
- Variace konstant. Máme
$$y' = c'x + c$$
Dosadíme do původní rovnice
$$\begin{aligned} c'x + c - \frac{cx}{x} &= x \\ c' &= 1 \\ c &= x + K \end{aligned}$$
- Řešení:
$$\begin{aligned} y = (x + K_1)x, &\qquad K_1 \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0), \\ y = (x + K_2)x, &\qquad K_2 \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty) \end{aligned}$$
- Lepení: Zkusíme řešení slepit v bodě 0. Uvažujme funkci
$$y = \begin{cases} x(x + K_1), & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0 \\ x(x + K_2), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$
Aby funkce byla spojitá v 0, musí platit
$$\lim_{x \to 0-} y(x) = \lim_{x \to 0-} x(x + K_1) = 0 = \lim_{x \to 0+} y(x) = \lim_{x \to 0+} x(x + K_2),$$
což je splněno pro všechna K_1, K_2.
Navíc musí být funkce diferencovatelná. Protože y je spojitá na $\mathbb{R}$, máme
$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x \to 0-} y'(x) = \lim_{x \to 0-} 2x + K_1 = K_1 \\ y'_+(0) &= \lim_{x \to 0+} y'(x) = \lim_{x \to 0+} 2x + K_2 = K_2 \end{aligned}$$
Tedy $K_1 = K_2$.

- Závěr:

$$y = \begin{cases} x(x+K_1), & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0, \qquad K_1 \in \mathbb{R}, \\ x(x+K_1), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(c) $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$
Řešení:

- Máme funkce $p(x) = -x$, $q(x) = e^{\frac{x(x+2)}{x}}$. Jsou spojité na $(a,b) = (-\infty, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - xy = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a,b)$.
Dále na intervalech $(a,b) = \mathbb{R}$, $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned} y' - xy &= 0 \\ \int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y &= \int x \,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= \frac{1}{2}x^2 + c \\ |y| &= e^{\frac{1}{2}x^2 + c} \\ y &= \pm e^c e^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = ce^{\frac{1}{2}x^2}, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a,b).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'e^{\frac{1}{2}x^2} + xce^{\frac{1}{2}x^2}$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} c'e^{\frac{1}{2}x^2} + xce^{\frac{1}{2}x^2} - xe^{\frac{1}{2}x^2} &= e^{\frac{x(x+2)}{2}} \\ c'e^{\frac{1}{2}x^2} &= e^{\frac{x(x+2)}{2}} \\ c' &= e^x \\ c &= e^x + K \end{aligned}$$

- Závěr:

$$y = (e^x + K)\, e^{\frac{1}{2}x^2} x \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

(d) $y' \operatorname{tg} x - y = 1$
Řešení:

- Pro původní rovnici je $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Převedeme na lineární rovnici:

$$y' - y \cot x = \cot x.$$

Dále řešíme pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi)$ a $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - y\cot x = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi)$ a $x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$. Dále na intervalech $(a,b) = (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi)$ (resp. $(a,b) = (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$) a $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0,\infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned}
y' - y\cot x &= 0\\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \cot x\,\mathrm{d}x\\
\log|y| &= \log|\sin x| + c\\
|y| &= e^{\log|\sin x|+c}\\
|y| &= e^{c}|\sin x|\\
y &= \pm e^{c}|\sin x|
\end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$\begin{aligned}
y = c\sin x, &\qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi)\\
y = d\sin x, &\qquad d \in \mathbb{R},\ x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)
\end{aligned}$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'\sin x + c\cos x$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned}
c'\sin x + c\cos x - c\sin x\cdot\cot x &= \cot x\\
c' &= \frac{\cos x}{\sin^2 x}\\
c &= -\frac{1}{\sin x} + K
\end{aligned}$$

- Řešení:

$$\begin{aligned}
y = \left(-\frac{1}{\sin x} + K_1^k\right)\sin x = -1 + K_1^k\sin x, &\qquad K_1^k \in \mathbb{R},\ x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi)\\
y = \left(-\frac{1}{\sin x} + K_2^k\right)\sin x = -1 + K_2^k\sin x, &\qquad K_2^k \in \mathbb{R},\ x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)
\end{aligned}$$

- Lepení: Zkusíme řešení slepit v bodě $0+k\pi$. Uvažujme funkci

$$y = \begin{cases} -1 + K_1^k\sin x, & x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi)\\ -1, & x = 0\\ -1 + K_2^k\sin x, & x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)\end{cases}$$

Funkce je spojitá v $0+k\pi$ pro všechna $K_1^k, K_2^k \in \mathbb{R}$.

Navíc musí být funkce diferencovatelná. Protože y je spojitá na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi$, máme

$$y'_-(0+k\pi) = \lim_{x\to 0+k\pi-} y'(x) = \lim_{x\to 0+k\pi-} K_1^k \cos x = K_1^k$$
$$y'_+(0+k\pi) = \lim_{x\to 0+k\pi+} y'(x) = \lim_{x\to 0+k\pi+} K_2^k \cos x = K_2^k$$

Tedy $K_1^k = K_2^k$.

- Závěr:

$$y = \begin{cases} -1 + K_1^k \sin x, & x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, 0+k\pi) \\ -1, & x = 0, \qquad K_1^k \in \mathbb{R} \\ -1 + K_1^k \sin x, & x \in (0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi) \end{cases}$$

(e) $y' = -\frac{3}{x}y + \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 3$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = \frac{2}{x^3}$. Jsou spojité na $(a,b) = (-\infty, 0)$ a $(0,\infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' + \frac{3}{x}y = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a,b)$.
Dále na intervalech $(a,b) = (-\infty, 0)$ (resp. $(0,\infty)$), $J_1 = (-\infty,0)$, (resp. $J_2 = (0,\infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned} y' + \frac{3}{x}y &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= -3\log|x| + c \\ |y| &= e^c \frac{1}{|x|^3} \\ y &= \pm e^c \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = c\frac{1}{x^3}, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (-\infty,0) \text{ nebo } x \in (0,\infty).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = \frac{c'}{x^3} - 3\frac{c}{x^4}$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} \frac{c'}{x^3} - 3\frac{c}{x^4} + \frac{3}{x}\cdot\frac{c}{x^3} &= \frac{2}{x^3} \\ \frac{c'}{x^3} &= \frac{2}{x^3} \\ c' &= 2 \\ c &= 2x + K \end{aligned}$$

- Závěr:
$$y = \frac{2x+K}{x^3}, x \in (-\infty, 0), x \in (0, \infty).$$
- Počáteční podmínky. Máme $y(1) = 3$. Tedy
$$\begin{aligned} \frac{2+K}{1^3} &= 3, \\ K &= 1. \end{aligned}$$

Tedy řešením je
$$y = \frac{2x+1}{x^3}, x \in (0, \infty).$$

(f) $y' = y + e^x$, $y(2) = -3$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = -1$, $q(x) = e^x$. Jsou spojité na $(a, b) = (-\infty, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici
$$y' - y = 0$$
Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a, b)$.
Dále na intervalech $(a, b) = \mathbb{R}$, $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme
$$\begin{aligned} y' - y &= 0 \\ \int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y &= \int 1 \,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= x + c \\ |y| &= e^{x+c} \\ |y| &= e^c e^x \\ y &= \pm e^c e^x \end{aligned}$$
Spolu se stacionárním řešením lze psát
$$y = ce^x, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a, b).$$
- Variace konstant. Máme
$$y' = c'e^x + ce^x$$
Dosadíme do původní rovnice
$$\begin{aligned} c'e^x + ce^x - ce^x &= e^x \\ c'e^x &= e^x \\ c' &= 1 \\ c &= x + K \end{aligned}$$
- Závěr:
$$y = (x + K)e^x, x \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

- Počáteční podmínky. Máme $y(2) = -3$, tedy

$$\begin{aligned} (2+K)e^2 &= -3 \\ K &= \frac{-3-2e^2}{e^2} \\ K &= \frac{-3}{e^2} - 2 \end{aligned}$$

  Řešením je tedy
$$y = (x - 3e^{-2} - 2)e^x, x \in \mathbb{R}.$$

(g) $y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 1 + x^3$, $y(1) = -1$
Řešení:

- Máme funkce $p(x) = -\frac{3x^2}{1+x^3}$, $q(x) = 1 + x^3$. Jsou spojité na $(a, b) = (-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici
$$y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 0.$$
  Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a, b)$.
  Dále na intervalech (a, b), $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme
$$\begin{aligned} y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} &= 0 \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \\ \log|y| &= \log|1+x^3| + c \\ |y| &= e^{\log|1+x^3|+c} \\ |y| &= e^c|1+x^3| \\ y &= \pm e^c(1+x^3) \end{aligned}$$
  Spolu se stacionárním řešením lze psát
$$y = c(1+x^3), \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a, b).$$
- Variace konstant. Máme
$$y' = c'(1+x^3) + 3cx^2$$
  Dosadíme do původní rovnice
$$\begin{aligned} c'(1+x^3) + 3cx^2 - \frac{3x^2}{1+x^3}c(1+x^3) &= 1 + x^3 \\ c' &= 1 \\ c &= x + K \end{aligned}$$
- Závěr:
$$y = (x+K)(1+x^3),\ x \in (-1, \infty),\ \text{nebo } x \in (-\infty, -1)$$

- Počáteční podmínky. Máme $y(1) = -1$. Tedy

$$\begin{aligned}(1+K)(1+1^3) &= -1\\ K &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Tedy řešením je

$$y = (x - \frac{3}{2})(1+x^3),\ x \in (-1, \infty)$$

(h) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$

Řešení:

- Původní rovnice je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Nejprve ji převedeme na základní tvar

$$y' + \frac{(x+1)}{x}y = 3xe^{-x}$$

- Máme funkce $p(x) = \frac{x+1}{x}$, $q(x) = 2xe^{-x}$. Jsou spojité na $(a,b) = (-\infty, 0)$ a $(0,\infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' + \frac{(x+1)}{x}y = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a,b)$.
Dále na intervalech (a,b), $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0,\infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned}y' + \frac{(x+1)}{x}y &= 0\\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -\frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x\\ \log|y| &= -x - \log|x| + c\\ |y| &= e^{-x-\log|x|+c}\\ |y| &= e^c e^{-x}\frac{1}{x}\\ y &= \pm e^c e^{-x}\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = ce^{-x}\frac{1}{x}, \qquad c \in \mathbb{R},\ x \in (a,b).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'e^{-x}\frac{1}{x} - ce^{-x}\frac{1}{x} - \frac{ce^{-x}}{x^2}$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned}c'e^{-x}\frac{1}{x} - ce^{-x}\frac{1}{x} - \frac{ce^{-x}}{x^2} + \frac{x+1}{x}ce^{-x}\frac{1}{x} &= 3xe^{-x}\\ c'e^{-x}\frac{1}{x} &= 3xe^{-x}\\ c' &= 3x^2\\ c &= x^3 + K\end{aligned}$$

- Zatím máme:

$$y = (x^3 + K_1)e^{-x}\frac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0), K_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = (x^3 + K_2)e^{-x}\frac{1}{x},\ x \in (0, \infty), K_2 \in \mathbb{R}$$

- Lepení: Zkusíme řešení slepit v bodě 0. Uvažujme funkci

$$y = \begin{cases} (x^3 + K_1)e^{-x}\frac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0), \\ (x^3 + K_2)e^{-x}\frac{1}{x}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

  Aby funkce byla spojitá v 0, musí platit

$$\lim_{x\to 0-} y(x) = \lim_{x\to 0-} (x^3 + K_1)e^{-x}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} y(x) = \lim_{x\to 0+} (x^3 + K_2)e^{-x}\frac{1}{x}.$$

  Limity existují vlastní a rovnají se pouze pro $K_1 = K_2 = 0$. Limita je pak rovna 0.
  Navíc musí být funkce diferencovatelná. Protože y je spojitá na $\mathbb{R}$, máme

$$y'_-(0) = \lim_{x\to 0-} y'(x) = \lim_{x\to 0-} -e^{-x}x(x-2) = 0$$

$$= y'_+(0) = \lim_{x\to 0+} y'(x) = \lim_{x\to 0+} -e^{-x}x(x-2) = 0$$

- Závěr:

$$y_1 = \begin{cases} (x^2)e^{-x}, & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0, \\ (x^2)e^{-x}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$y_2 = (x^3 + K_1)e^{-x}\frac{1}{x},\ x \in (-\infty, 0), K_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y_3 = (x^3 + K_2)e^{-x}\frac{1}{x},\ x \in (0, \infty), K_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zkouškové příklady

2. Najděte řešení diferenciálních rovnic
   (a) $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$
   (b) $y' - y\ln x = x^{x+1}$
   (c) ❀ $xy' - 2y = 2x^4$
   (d) $y' + 3x^2 y = e^{-x^3+x}\sin x$
   (e) $y'(1+x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1+x^2)$
   (f) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 1$

Separované proměnné – homogenní rovnice

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic
   (a) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$
   (b) $xy' - y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) = 0$
   (c) $y' = \frac{y}{x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x} + 1}$

2

(a) $y' + \frac{1}{x} y = e^{x^2}$ $\quad x \neq 0$

- $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$

$\ln|y| = -\ln x + k$

$|y| = e^k \cdot e^{\ln \frac{1}{x}}$

$y = z \cdot \frac{1}{x}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

- $z' \cdot \frac{1}{x} + z \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot z \frac{1}{x} = e^{x^2}$

$z' = x e^{x^2}$ $\quad$ subst.

$z = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

- $y_1 = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c \right)$ $\quad x \in (0, \infty)$

$y_2 = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + d \right)$ $\quad x \in (-\infty, 0)$

(b)

$$y' - y \ln x = x^{x+1} \qquad x^{x+1} = e^{(x+1)\ln x} \qquad \boxed{x > 0}$$

- $y' = y \ln x$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \ln x \,dx$$

per partes

$$\ln|y| = x \ln x - x + k$$

$$|y| = e^{\ln x^x - x + k}$$

$$\underline{y = k\, e^{-x} \cdot x^x}$$

- $y_p = k(x)\, e^{-x} \cdot x^x = k\, e^{-x} e^{x \ln x}$

$$k' e^{-x} x^x + k\left(-e^{-x} x^x + e^{-x} x^x \cdot (\ln x + 1)\right) - k\, e^{-x} x^x \ln x = x^{x+1}$$

$$\underline{k' e^{-x} x^x = x^{x+1}}$$

$$k' = e^x \cdot x \qquad \text{per partes}$$

$$\underline{k = e^x x - e^x + c}$$

celkem $\quad \underline{y = (e^x x - e^x + c)\, e^{-x} \cdot x^x} \qquad x \in (0, \infty)$

(c)

$xy' - 2y = 2x^4 \qquad x \in \mathbb{R}$

- $y' - 2y \cdot \frac{1}{x} = 2x^3 \qquad x \neq 0$

$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$

$\ln|y| = 2\ln x + k$

$\underline{y = kx^2} \qquad k \in \mathbb{R}$

- $k'x^2 + k \cdot 2x - 2kx^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x^3 \qquad x > 0$

$k' = 2x$

$k = x^2 + c_1$

- $y = (x^2 + c_1)x^2 \qquad x > 0$

- pro $x < 0$ dostaneme

$y = (x^2 + c_2)x^2$

- v 0 lze slepit,

$$y = \begin{cases} x^2(x^2+c_2) & x \in (-\infty, 0) \\ x^2(x^2+c_1) & x \in [0, \infty) \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

máme v 0 derivaci? Lze přímo upočítat, fce je spoj.

$y'_+ = \lim_{x \to 0+} 4x^3 + 2c_1 x = 0$

$y'_- = \lim_{x \to 0-} 4x^3 + 2c_2 x = 0$

Všechno ok

(d)

$$y' + 3x^2 y = e^{-x^3+x} \sin x$$

- $\frac{y'}{y} = -3x^2$

$\ln|y| = -x^3 + c$

$y = e^{-x^3} \cdot k \quad k \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

- $e^{-x^3} \cdot k' + k e^{-x^3}(-3x^2) + 3x^2 k e^{-x^3} = e^{-x^3+x} \sin x$

$k' = e^x \sin x$ 2x per partes

$k = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$

$y = e^{-x^3}\left(\underline{\frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x} + c \right) \quad x, c \in \mathbb{R}$

(e)

$$y'(1+x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1+x^2)$$

$$y' + \frac{y}{\arctan x\,(1+x^2)} = x^2 \qquad x \in (-\infty, 0) \quad x \in (0, \infty)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{\arctan x\,(1+x^2)}$$

$$\ln|y| = -\ln|\arctan x| + k$$

$$y = k\,\frac{1}{\arctan x} \qquad x \neq 0$$

$$k'\frac{1}{\arctan x} + k\,\frac{-1}{\arctan^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{k\,\frac{1}{\arctan x}}{\arctan x\,(1+x^2)} = x^2$$

$$k' = x^2 \arctan x$$

per partes

$$\int x^2 \arctan x = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{2x^3}{2(1+x^2)}\,dx$$

$u' = x^2 \quad v = \arctan x$

$u = \frac{1}{3}x^3 \quad v' = \frac{1}{1+x^2}$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}(u - \ln u)$$

celkem

$$k = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}\left(1+x^2 - \ln(1+x^2)\right) + c$$

$$y = \frac{1}{\arctan x}\left[\frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}\left(1+x^2 - \ln(1+x^2)\right) + c\right]$$

$x \neq 0$

(f) $y' + \frac{x}{1+x^2}\, y = 1$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{1+x^2}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$$

$$y = k \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \left(= k(1+x^2)^{-1/2}\right)$$

$$k' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \cdot 2x + \frac{x k}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$k' = \sqrt{1+x^2}$$

buď spec. subst. $y = \sinh x$

nebo Euler. subst.

$$t = \sqrt{x^2+1} + x$$

pak (z tabulky) $x = \frac{t^2-1}{2t}$

$$\sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t}$$

a $dx = \frac{2t \cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2}{4t^2}\, dt$

máme

$$\int \left(t - \frac{t^2-1}{2t}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2-1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int \frac{2t^2 - t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{2t^2 - t^2 + 1}{2t^2}\, dt$$

$$= \int \frac{(t^2+1)\cdot(t^2+1)}{4t^3}\, dt = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{4t^3}\, dt = \frac{1}{4} \int t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} + 2 \ln t + \frac{-1}{2t^2} \right) \rightarrow$$

$$k = \underbrace{\frac{1}{8} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^2 + \frac{1}{2} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) - \frac{1}{8} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} + x)^2} + c}$$

pak $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[\qquad - \| - \qquad \right]$

$x \in \mathbb{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (F)
LS 2003-2004, 17.9. 2004

Příklad F1: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = x\sqrt{y} \qquad \text{(10 bodů).}$$

Příklad F2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 1. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + y' = x \sin x. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F4: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = e^{x+y} - 1. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F5: Najděte všechna $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^3$ taková, že maximální řešení $\boldsymbol{y}$ počáteční úlohy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$$

splňuje $\lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{y}(t)}{t} e^{-t} = \boldsymbol{o}$. (10 bodů)

Výsledky

Příklad F1: $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2$, $x \in \mathbf{R}$, $c > 0$;

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \sqrt{-2c}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (\sqrt{-2c}, +\infty), \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c}, \infty) \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_1)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_2)^2, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases} \quad c_1 \le 0,\ c_2 \le 0;$$

jiná substituce dá

Příklad F2: $y(x) = \left(\frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2} - x) - \frac{1}{8}(\sqrt{1+x^2} - x)^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad F3: $y(x) = -\frac{3}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x^2 \sin x + c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$

Příklad F4: $y(x) = -\log(-x - c) - x$, $x \in (-\infty, -c)$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad F5: $\left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; k \in \mathbf{R} \right\}$

Celkem tedy dostávám $y_{1,2}(x) = \pm\sqrt{2\log(d(1+e^x))}$, a to na intervale $\mathbb{R}$ pro $d \geq 1$ a na $\left(\log\left(\frac{1}{d} - 1\right), \infty\right)$ pro $d \in (0,1)$.

4. krok
Lepit opět není co a kde.

7. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$. Opět vidíme, že $x \neq 0$, a tedy tím můžeme podělit. Dostaneme homogenní rovnici

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Opět provedeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, již máme spočteno, že pak $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dohromady

$$z + xz' = e^z + z,$$

tedy

$$z' = \frac{1}{x}e^z.$$

Opět separované proměnné, opět Poznámka 3.

1. krok
Funkce $\frac{1}{x}$ je definována na intervalech $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$.

2. krok
Funkce e^z je vždy nenulová a definovaná, tedy $J = \mathbb{R}$.

3. krok
Výpočet pro $x \in I_2$, tj. $x > 0$:

$$z'(x)e^{-z(x)} = \frac{1}{x}.$$

Tedy

$$-e^{-z(x)} = \log x + c = \log(dx)$$

pro $c \in \mathbb{R}$ neboli pro $d > 0$.

4. krok
Abych mohl použít logaritmus a zbavit se exponenciály, potřebuju aby $-\log(dx) > 0$. Tedy $dx \in (0,1)$. Tedy je třeba, aby $x \in (0, \frac{1}{d})$. Pak

$$z = -\log(-\log(dx)) \quad d > 0.$$

3. krok
Výpočet pro $x \in I_1$, tj. $x < 0$:

$$z'(x)e^{-z(x)} = \frac{1}{x}.$$

Tedy

$$-e^{-z} = \log(-x) + c = \log(-dx)$$

pro $c \in \mathbb{R}$ neboli pro $d > 0$.

4. krok
Abych mohl použít logaritmus a zbavit se exponenciály, tak potřebuju aby platilo $-\log(-dx) > 0$. Tedy $-dx \in (0,1)$. Tedy je třeba, aby $x \in (-\frac{1}{d}, 0)$. Pak

$$z = -\log(-\log(-dx)), \quad d > 0.$$

5. krok
Lepit opět nikde nelze.

Nakonec to ještě shrneme, a vrátíme se k y. Dohromady to mohu napsat jako

$$y(x) = xz(x) = -x\log(-\log(dx)), \quad d \neq 0$$

na intervalech $(\frac{1}{d}, 0)$ a $(0, \frac{1}{d})$.

Poznamenejme ještě, že se to dá zapsat také pomocí konstanty c, tedy

$$y(x) = -x\log(-\log(|x|) - c), \quad c \in \mathbb{R}$$

na intervalech $(-e^{-c}, 0)$ a $(0, e^{-c})$.

3. $y' = \sqrt[3]{y}$. Opět viz Poznámku 3, $g(y) = \sqrt[3]{y}$ a $h(x) = 1$.

1. krok
Zřejmě $I = \mathbb{R}$.

2. krok
g je definována všude (tj. na $\mathbb{R}$), nulová je pouze v 0 (tedy máme řešení $y \equiv 0$) a tedy máme intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.

3. krok
Integrujme:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y(x)}} = 1,$$

tedy

$$\frac{3}{2}y(x)^{\frac{2}{3}} = x + c.$$

4. krok
Vidíme, že bez ohledu na znaménko y musí být $x + c > 0$, tedy $x \in (-c, \infty)$. Je-li $y < 0$ (tj. uvažujeme J_1), pak $y = -\left(\frac{2}{3}(x + c)\right)^{\frac{3}{2}}$. Jeli $y > 0$, pak $y = \left(\frac{2}{3}(x + c)\right)^{\frac{3}{2}}$.

5. krok
Vidíme, že v obou případech je $\lim\limits_{x \to (-c)^+} \pm \left(\frac{2}{3}(x + c)\right)^{\frac{3}{2}} = 0$, tedy zde můžeme přilepit nulové řešení. Celkem dostaneme řešení

$$y_{1,2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ \pm\left(\frac{2}{3}(x + c)\right)^{\frac{3}{2}}, & x > c. \end{cases}.$$

A nesmíme zapomenout, že navíc ještě máme singulární řešení $y_3(x) = 0$.

4. $xy' - y\left(1 + \log \frac{y}{x}\right) = 0$. Vidíme, že pro $x = 0$ to nedává smysl, a tedy ani žádné řešení nemůže nulou procházet. Tedy zadanou rovnici můžeme podělit x. Dostaneme

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \log \frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Jedná se tedy o homogenní rovnici, a tedy použijeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak $y(x) = xz(x)$, a tedy $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dosadíme do (3):

$$z + xz' = z(1 + \log z)$$

Tedy po úpravě (již víme, že x můžeme podělit):

$$z' = \frac{1}{x}z \log z$$

To už je rovnice se separovanými proměnnými, a tedy můžeme postupovat podle Poznámky 3.

1. krok
Vidíme, že pro $x = 0$ to není definované, a tedy máme dva intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$.

2. krok
Nulový bod funkce $z \log z$ je 1. Tedy máme singulární řešení a dva intervaly $J_1 = (0, 1)$ a $J_2 = (1, \infty)$. (Pro $z \leq 0$ není $z \log z$ definováno.)

3. krok
Integrujeme pro $x < 0$.

$$\frac{z'(x)}{z(x) \log z(x)} = \frac{1}{x},$$

tedy pomocí substituce ž $= z(x)$

$$\int \frac{1}{\check{z} \log \check{z}} \, d\check{z} \Big|_{\check{z}=z(x)} = \log x + c.$$

Dále můžeme provést substituci $\check{\check{z}} = \log(\check{z})$, tedy $\check{\check{z}} = \log(z(x))$. Pak

$$\int \frac{1}{\check{\check{z}}} \, d\check{\check{z}} \Big|_{\check{\check{z}}=\log \check{z}, \ \check{z}=z(x)} = \log x + c.$$

Tedy dohromady

$$\log(|\log(z(x))|) = \log x + c.$$

Zbavíme se 1. logaritmu (zatím může být x a $c \in \mathbb{R}$ libovolné):

$$|\log(z)| = e^{c - \log x} = e^c x.$$

4. krok
Pro $z \in J_1$, tj. $0 < z < 1$ máme $\log z < 0$, a tedy

$$z = e^{-e^c x}.$$

Pro $z \in J_2$, tj. $1 < z$ máme $\log z > 0$, a tedy

$$z = e^{e^c x}.$$

Tedy pro $d = e^c$, dostaneme najednou řešení

$$z(x) = e^{dx}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

(Interval J_1 vyhodí výsledek pro $d < 0$, interval J_2 vyhodí výsledek pro $d > 0$ a případ $d = 0$ odpovídá singulárnímu řešení.

Pro interval $I_1 = (-\infty, 0)$ bychom obdobným postupem dostali stejné řešení. Lepit zde nemusíme, neboť e^{dx} se pro $d \neq 0$ a $x \neq 0$ se singulárním řešením nikde nepotká.

Nakonec se ještě nesmíme zapomenout vrátit k y. Víme, že $y(x) = xz(x)$, tedy

$$y(x) = xe^{dx}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

$\log(k\,|x|) > \log 4$, neboli $x \in (\frac{4}{k}, \infty)$. Pro tato x pak platí

$$\frac{(y-2)^2}{y-3} = kx,$$

což vede na rovnici

$$y^2 + y(-4 - kx) + (4 + 3kx) = 0.$$

Ta má řešení

$$y_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(4 + kx \pm \sqrt{(4+kx)^2 - 4(4+3kx)}\Big) = 2 + \frac{kx}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$

Jelikož platí $\frac{kx}{2} > 2$ a $y(x) \in (3,4)$, zajímá nás řešení

$$y(x) = 2 + \frac{kx}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{kx(kx-4)}.$$

Požadavek $y(1) = \frac{7}{2}$ implikuje $k = \frac{9}{2}$, což dává řešení

$$y(x) = 2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2}x(\frac{9}{2}x - 4)}, \quad x \in (\frac{8}{9}, \infty).$$

(6) Zkoumejme chování řešení pro $x \to \frac{8}{9}+$. Pak $y(x) \to 4$, avšak v bodě $[\frac{8}{9}, 4]$ není rovnice splněna, neboť se levá strana rovnice

$$\frac{8}{9} \cdot 0 \cdot y'(\frac{8}{9})$$

nemůže rovnat pravé straně, totiž 2.

♣

3a

13.7.3. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x} + 1}.$$

Řešení. Uvažujme substituci $y = zx$. Pak $y' = z'x + z$, a tedy zadaná rovnice přejde na tvar

$$z'x + z = z - \sqrt[3]{z+1},$$

tj.

$$z' = \frac{-\sqrt[3]{z+1}}{x}.$$

Dostáváme tak rovnici se separovanými proměnnými.

(1) Zjevně $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.
(2) Stacionární řešení je $z = -1$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(3) Intervaly pro z jsou tvaru $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.

(4) Jelikož
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$$
a
$$\int -\frac{1}{\sqrt[3]{z+1}}\,\mathrm{d}z = -\frac{3}{2}(z+1)^{\frac{2}{3}},$$
existuje $k > 0$ takové, že platí
$$-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2 = \log(k\,|x|).$$

(5) Na intervalu $J_1 = (-\infty, -1)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Tedy $\log(k\,|x|) < 0$, což znamená $x \in (0, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (-\frac{1}{k}, 0)$. Máme tak řešení
$$z(x) = -1 - \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

Pro interval $((-1, \infty)$ platí, že ho funkce $-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{z+1})^2$ též zobrazuje na $(-\infty, 0)$. Jako výše tak dostáváme řešení
$$z(x) = -1 + \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, \quad x \in (0, \frac{1}{k}), \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0).$$

(6) Eventuální lepení nelze provést v 0, neboť zde rovnice nemá smysl. V bodech $\pm\frac{1}{k}$ však $z(x)$ konverguje k -1, a tedy lze lepit na stacionární řešení. Dostáváme tak maximální řešení
$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$
respektive
$$z(x) = \begin{cases} -1 \pm \left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -1, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

Přechodem k původní rovnici tak máme řešení
$$y(x) = \begin{cases} -x \pm x\left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (0, \frac{1}{k}), \\ -x, & x \in [\frac{1}{k}, \infty), \end{cases}$$
respektive
$$z(x) = \begin{cases} -x \pm x\left(\sqrt[2]{-\frac{2}{3}\log(k\,|x|)}\right)^3, & x \in (-\frac{1}{k}, 0), \\ -x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{k}]. \end{cases}$$

(Konstanta k je kladná.) Navíc pak ještě máme řešení

$$y(x) = -x, \quad x \in (-\infty, 0), \quad x \in (0, \infty).$$

♣

13.7.4. Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{3(y^2+1)}{2x(x+3)}.$$

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, kde $h(x) = \frac{3}{x(x+3)}$ a $g(y) = \frac{1}{2}(y^2+1)$.

(1) Intervaly pro funkci h jsou $(-\infty,-3)$, $(-3,0)$ a $(0,\infty)$.
(2) Stacionární řešení žádná nejsou.
(3) Funkce g je nenulová na $\mathbb{R}$, tj. $J = \mathbb{R}$.
(4) Jelikož

$$\int \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 2\operatorname{arctg} y$$

a

$$\int \frac{3}{x(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = \log\left|\frac{x}{x+3}\right|,$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$2\operatorname{arctg} y = \log\left|\frac{x}{x+3}\right| + c.$$

Tedy

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{x+3}\right| + \frac{c}{2}\right) \tag{13.20}$$

na intervalech, které určíme v následujícím kroku.
(5) Nechť $I = (0,\infty)$. Funkce $2\operatorname{arctg} y$ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(-\pi,\pi)$ a $\left|\frac{x}{x+3}\right| = \frac{x}{x+3}$ na $(0,\infty)$. Tedy řešíme nerovnici

$$\log\frac{x}{x+3} + c \in (-\pi,\pi).$$

Nerovnost

$$\frac{x}{x+3} > e^{-\pi-c}$$

není nikdy splněna, pokud $c \le -\pi$, a pro $c > -\pi$ vede na nerovnost

$$x > \frac{3e^{-\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}.$$

Druhá nerovnost

$$\frac{x}{x+3} < e^{\pi-c}$$

je pro $c \le \pi$ splněna vždy, zatímco pro $c > \pi$ implikuje nerovnost

$$x < \frac{3e^{\pi-c}}{1-e^{-\pi-c}}.$$