23. cvičení – ODR se Separovanými proměnnými - lepení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic (nezapomeňte na případná lepení):

   (a) $y' = 2\sqrt{y}$

   i. obecně

   Řešení:

   - Podmínky: $y > 0$
   - Budeme řešit rovnici tvaru
   $$y' = 2\sqrt{y}$$
   tedy $g(y) = 2\sqrt{y}$, $h(x) = 1$.
   - Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
   - Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$ Rovnice má stacionární řešení
   $$y_0 \equiv 0.$$
   - Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (0, \infty)$.
   - Řešení ODR:
   $$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x$$
   $$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{2\sqrt{y}} \stackrel{C}{=} \sqrt{y}$$
   Tedy budeme pracovat s rovnicí
   $$\sqrt{y} = x + C$$
   - Uvažujme intervaly I a J. Pak
   $$\sqrt{y} = x + C$$
   kde C je konstanta.
   Zafixujme C. Máme $G(J) = (0, \infty)$.
   Tedy hledáme taková x, aby
   $$x + C > 0$$
   což je splněno pro $x \in (-C, \infty)$.
   Pro taková x vyjádříme řešení
   $$y_1 = (x + C)^2$$
   - Řešení:
   $$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$
   $$y_1 = (x + C)^2, x \in (-C, \infty)$$

- Lepení: Řešení y_1 lze v bodě $-C$ slepit. Máme

$$\lim_{x\to -C+} y_1 = \lim_{x\to -C+} (x+C)^2 = 0 = \lim_{x\to -C-} y_0$$

  Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

ii. $y(4) = 1$;
Z počáteční podmínky máme

$$\begin{aligned} 1 &= (4+C)^2 \\ \pm 1 &= 4 + C \\ -3 &= C_1 \end{aligned}$$

Tedy

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 3), \\ 0, & x = 3, \\ (x-3)^2, & x \in (3, \infty), \end{cases}$$

Druhá možnost

$$-5 = C_2$$

by dala řešení

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 5), \\ 0, & x = 5, \\ (x-5)^2, & x \in (5, \infty), \end{cases}$$

které ale nesplňuje počáteční podmínku $y(4) = 1$.

iii. $y(0) = -1$;
Řešení: Ze zadání máme podmínku $y > 0$, tedy tato počáteční podmínka nemůže nastat.

iv. $y(1) = 0$;
Počáteční podmínku splňuje stacionární řešení $y \equiv 0$.
Dále je splněna pro všechna řešení

$$y_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty), \end{cases}$$

kde $C \leq -1$.

(b) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

Řešení:

- Podmínky: $y > 0$, $x > 0$.
- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
tedy $g(y) = \sqrt{y}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (0, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$. Rovnice má stacionární řešení
$$y_0 \equiv 0, x \in (0, \infty).$$
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} 2\sqrt{x}$$
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt{y}} \stackrel{C}{=} 2\sqrt{y}$$
Tedy budeme pracovat s rovnicí
$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C$$
- Uvažujme intervaly I a J. Pak
$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C$$
kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J) = (0, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby
$$2\sqrt{x} + C > 0.$$
Je-li $C \geq 0$, je rovnice splněna triviálně. Tedy pro $x \in I = (0, \infty)$ vyjádříme řešení
$$y_1 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2, \qquad x > 0, C \geq 0.$$
Je-li $C < 0$, tak
$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} + C &> 0 \\ \sqrt{x} &> -\frac{C}{2} \\ x &> \left(-\frac{C}{2}\right)^2 \end{aligned}$$
Pro taková x vyjádříme řešení
$$y_2 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2, \qquad x > \frac{C^2}{4}, C < 0.$$

- Řešení:
$$y_0 \equiv 0, x \in (0, \infty)$$
$$y_1 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2, \qquad x > 0, C \geq 0.$$
$$y_2 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2, \qquad x > \frac{C^2}{4}, C < 0.$$
- Lepení: Řešení y_2 lze v bodě $\frac{C^2}{4}$ slepit. Máme
$$\lim_{x \to \frac{C^2}{4}+} y_2 = \lim_{x \to \frac{C^2}{4}+} \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2 = \lim_{x \to \frac{C^2}{4}+} \left(\frac{|C|}{2} + \frac{C}{2}\right)^2 = 0 = \lim_{x \to \frac{C^2}{4}+} y_0 =$$
Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení
$$y_3 = \begin{cases} 0, & x \in (0, \frac{C^2}{4}), \\ 0, & x = \frac{C^2}{4}, \\ \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2, & x \in \left(\frac{C^2}{4}, \infty\right) \end{cases}$$
- Závěr: Máme řešení
$$y_0 \equiv 0, x \in (0, \infty).$$
$$y_1 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2, \qquad x > 0, C \geq 0.$$
$$y_3 = \begin{cases} 0, & x \in (0, \frac{C^2}{4}), \\ 0, & x = \frac{C^2}{4}, \\ \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)^2, & x \in \left(\frac{C^2}{4}, \infty\right) \end{cases} \qquad C < 0$$

(c) $y' = \sqrt[3]{y}$
Řešení:
- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = \sqrt[3]{y}$$
tedy $g(y) = \sqrt[3]{y}$, $h(x) = 1$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$ Rovnice má stacionární řešení
$$y_0 \equiv 0.$$
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x$$
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \stackrel{C}{=} \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = x + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_1. Pak

  $$\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = x + C$$

  kde C je konstanta.
  Zafixujme C. Máme $G(J) = (0, \infty)$.
  Tedy hledáme taková x, aby

  $$x + C > 0$$

  což je splněno pro $x \in (-C, \infty)$.
  Pro taková x vyjádříme řešení

  $$\begin{aligned}\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} &= x + C\\ \sqrt[3]{y^2} &= \frac{2}{3}(x + C)\\ |y| &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}\end{aligned}$$

  Na intervalu $J_1 = (-\infty, 0)$ je $y < 0$, tedy

  $$y_1 = -\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \qquad x \in (-C, \infty).$$

- Uvažujme intervaly I a J_1. Analogickým postupem dostaneme řešení

  $$y_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \qquad x \in (-C, \infty).$$

- Řešení:

  $$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$

  $$y_1 = -\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \qquad x \in (-C, \infty).$$

  $$y_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \qquad x \in (-C, \infty).$$

- Lepení: Řešení y_1 i y_2 lze v bodě $-C$ slepit. Máme

  $$\lim_{x \to -C+} y_{1,2} = \lim_{x \to -C+} \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3} = 0 = \lim_{x \to -C-} y_0$$

  Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

  $$y_{3,4} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C),\\ 0, & x = -C,\\ \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, & x \in (-C, \infty).\end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_{3,4} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x+C)\right)^3}, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

(d) $y' = yx$

Řešení:

- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = yx$$
tedy $g(y) = y$, $h(x) = x$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$ Rovnice má stacionární řešení
$$y_0 \equiv 0.$$
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}x^2$$
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{y} \overset{C}{=} \log|y|$$
Tedy budeme pracovat s rovnicí
$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$
- Uvažujme intervaly I a J_1. Pak
$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$
kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J_1) = (-\infty, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby
$$x + C \in \mathbb{R}$$
což je splněno pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.
Pro taková x vyjádříme řešení
$$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$
Protože jsme na intervalu J_1, dostáváme řešení
$$y_1 = -e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

- Analogicky na intervalech J_2, I dostaneme řešení

$$y_2 = e^{\frac{1}{2}x^2+C}$$

- Řešení:

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$
$$y_{1,2} = \pm e^{\frac{1}{2}x^2+C}, x \in (-\infty, \infty)$$

- Lepení: Tento příklad slepit nelze, všechna řešení už jsou maximální.

(e) $y' = \sqrt{1-y^2}$

Řešení:

- Podmínky: $1 - y^2 > 0$
- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

  tedy $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, $h(x) = 1$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = \pm 1$ Rovnice má stacionární řešení

$$y_{0,1} \equiv \pm 1.$$

- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (-1, 1)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \overset{C}{=} \arcsin y$$

  Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\arcsin y = x + C$$

- Uvažujme intervaly I a J. Pak

$$\arcsin y = x + C$$

  kde C je konstanta.
  Zafixujme C. Máme $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
  Tedy hledáme taková x, aby

$$-\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}$$

  což je splněno pro $x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$.
  Pro taková x vyjádříme řešení

$$y_2 = \sin(x + C)$$

- Řešení:
$$y_{0,1} \equiv \pm 1, x \in (-\infty, \infty)$$
$$y_2 = \sin(x + C), x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$$
- Lepení: Řešení y_2 lze v bodě $-\frac{\pi}{2} - C$ a $\frac{\pi}{2} - C$ slepit. Máme
$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2} - C+} y_2 = \lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2} - C+} \sin(x + C) = \pm 1 = \lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2} - C+} y_{0,1}$$
Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení
$$y_3 = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - C), \\ -1, & x = -\frac{\pi}{2} - C, \\ \sin(x + C), & x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C) \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} - C, \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2} - C, \infty), \end{cases}$$
- Závěr: Máme řešení
$$y_{0,1} \equiv \pm 1, x \in (-\infty, \infty).$$
$$y_3 = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - C), \\ -1, & x = -\frac{\pi}{2} - C, \\ \sin(x + C), & x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C) \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} - C, \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2} - C, \infty), \end{cases}$$

(f) $y'y = x^3$

Řešení:

- Podmínky:
- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = \frac{x^3}{y}$$
tedy $g(y) = \frac{1}{y}$. $h(x) = x^3$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod původní rovnice (než jsme ji upravili) je
$$y = 0.$$
Řešení $y_0 \equiv 0$ ale nesplňuje diferenciální rovnici. Stacionární řešení tudíž rovnice nemá.
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.

- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4}x^4$$
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int y \overset{C}{=} \frac{1}{2}y^2$$
Tedy budeme pracovat s rovnicí
$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^4 + C$$
- Uvažujme intervaly I a J_1. Pak
$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^4 + C$$
kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J_1) = (0, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby
$$\frac{1}{4}x^4 + C > 0$$
Pro $C > 0$ je splněno triviálně, tedy $x \in (-\infty, \infty)$.
Pro $C \leq 0$ vyjdou intervaly $(-\infty, -\sqrt[4]{-4C})$ a $(\sqrt[4]{-4C}, \infty)$.
Pro taková x vyjádříme řešení
$$|y| = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}$$
Na intervalu J_1 pak dostaneme
$$y = -\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}$$
- Pro intervaly I a J_2 postupujeme analogicky a získáme řešení
$$y = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}$$
- Řešení:
$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$
$$y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4C}), C \leq 0$$
$$y_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (\sqrt[4]{-4C}, \infty), C \leq 0.$$
- Lepení: Slepit lze pouze řešení pro $C = 0$ (se sebou navzájem). Máme totiž
$$\lim_{x \to -\sqrt[4]{-4\cdot 0}-} y_{3,4} = \lim_{x \to -\sqrt[4]{-4\cdot 0}-} \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2\cdot 0} = 0$$

a

$$\lim_{x\to\sqrt[4]{-4\cdot 0}+} y_{5,6} = \lim_{x\to\sqrt[4]{-4\cdot 0}+} \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2\cdot 0} = 0$$

Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_{7,8,9,10} = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (-\infty, 0), \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

$$y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4C}), C < 0$$

$$y_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (\sqrt[4]{-4C}, \infty), C < 0.$$

$$y_{7,8,9,10} = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (-\infty, 0), \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

(g) $y' = x\sqrt[3]{y^2}$ **Řešení:**

- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = x\sqrt[3]{y^2}$$
tedy $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$ $h(x) = x$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$. Rovnice má stacionární řešení
$$y_0 \equiv 0.$$
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2$$
$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \stackrel{C}{=} 3\sqrt[3]{y}$$
Tedy budeme pracovat s rovnicí
$$3\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_1. Pak

$$3\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J) = (-\infty, 0)$.
Tedy hledáme taková x, aby

$$\frac{1}{2}x^2 + C < 0.$$

To může nastat jen pro $C < 0$. Pak $x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C})$.
Pro taková x vyjádříme řešení

$$y_1 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3$$

- Uvažujme intervaly I a J_2. Pak

$$3\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J) = (0, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby

$$\frac{1}{2}x^2 + C > 0.$$

Pro $C > 0$ je splněno triviálně, tedy $x \in \mathbb{R}$.
Pro $C \leq 0$ dostaneme $x \in (-\infty, -\sqrt{-2C})$ a $x \in (\sqrt{-2C}, \infty)$.
Pro taková x vyjádříme řešení

$$y_2 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3$$

- Řešení:

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}), C < 0$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), C \leq 0$$

$$y_4 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (\sqrt{-2C}, \infty), C \leq 0$$

- Lepení: Řešení y_1, y_3 a y_4 lze v bodech $\mp\sqrt{-2C}$ slepit. Máme

$$\lim_{x\to-\sqrt{-2C}+} y_1 = \lim_{x\to-\sqrt{-2C}+} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3 = 0$$

a

$$\lim_{x\to\sqrt{-2C}-} y_1 = \lim_{x\to\sqrt{-2C}-} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3 = 0$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{-2C}-} y_3 = \lim_{x\to-\sqrt{-2C}-} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3 = 0$$

a

$$\lim_{x\to\sqrt{-2C}+} y_4 = \lim_{x\to\sqrt{-2C}+} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3 = 0$$

Díky lemmatu o lepení půjdou řešení hladce nalepit (ve více kombinacích).

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

a dále slepená řešení

$$y_5 = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), C \le 0 \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C}, \infty) \end{cases}$$

$$y_6 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), C \le 0 \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in [-\sqrt{-2C}, \infty) \end{cases}$$

$$y_7 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}), C < 0 \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D, E \le 0$, kde $C \ge D \ge E$, máme

$$y_8 = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2D}, \sqrt{-2D}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2D}, \sqrt{-2E}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2E}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D \le 0$, kde $C \ge D$, máme

$$y_9 = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C}, -\sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2D}, \sqrt{-2D}), \\ 0, & x \in (\sqrt{-2D}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D \leq 0$, kde $C \geq D$, máme

$$y_{10} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C}, \sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (\sqrt{-2D}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D \leq 0$, $C \geq D$ máme

$$y_{11} = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C}, \sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (\sqrt{-2D}, \infty), \end{cases}$$

2. Příklady ze starších písemek.

   (a) $y' = x\sqrt[3]{1-y}$
   (b) $y' = x\sqrt{y}$
   (c) $y' \sin x = 2y \ln y$
   (d) $y' = xe^{-y}\sqrt[3]{e^y - 1}$

(3) odpovídající ODR je $y'(t) = -ky(t)$, kde k je konstanta, kterou později najdeme

4a $y' = x \sqrt[3]{1-y}$

$h(x)$, $g(y)$

$I = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

$y_0 \equiv 1$ na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-y}}\,dy = \int x \,dx$$

$g(y) \neq 0$ na $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ $= J$

$$-\frac{3}{2}(1-y)^{2/3} = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{(1-y)^2} = -\frac{x^2}{3} + c \rightarrow \text{musí být} > 0$$

≥ 0

$$(1-y)^2 = \left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3$$

$$(1-y) = \pm\sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3}$$

$$1 \pm \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} = y \qquad c \in \mathbb{R} \; ; \; c \geq \frac{x^2}{3} \qquad \sqrt{3c} \geq |x|$$

Rozbor:
- $c \leq 0$ nelze (prázdný / 1bodový def. obor)
- $c > 0$ $\rightarrow$ $x < \sqrt{3c}$, $\rightarrow$ $x > -\sqrt{3c}$ $\qquad x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c})$

- pro $x \rightarrow \pm\sqrt{3c}$ dostáváme $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3c}} 1 \pm \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} = 1$

$\rightarrow$ budeme lepit

Celkem

$$y_0 \equiv 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 + \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 - \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

2b) $y' = x\sqrt{y}$

$g(y) = \sqrt{y}$

$h(x) = x \qquad D_h = \mathbb{R} = I$

(2) $y_0 \equiv 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

(3) $g \neq 0$ na $(0,\infty) = J$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int x\,dx$

$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + k \qquad k \in \mathbb{R}$

$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + k \rightarrow$ musí být > 0 $\quad$ ($G(J) = (0,\infty)$

$y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \qquad 2\sqrt{y} \quad (0,\infty) \rightarrow (0,\infty)$)

$\frac{x^2}{4} + k > 0 \qquad x^2 > -4k \qquad$ " $|x| > \sqrt{-4k}$ "

(5) Rozbor:

$y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2$ • $k > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$

• $k \leq 0 \qquad x > \sqrt{-4k} \qquad x \in (\sqrt{-4k}, \infty)$

$x < -\sqrt{-4k} \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{-4k})$

$-\sqrt{-4k} \qquad \sqrt{4k}$

(6) Závěr:

$y_0 \equiv 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

$y_1 = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \qquad x \in \mathbb{R}$ pro $k > 0$ $\quad$ (nelze slepit, navíc je max.)

$$y_2 = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}] \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & x \in (-\sqrt{-4k}, \infty) \end{cases} \qquad k \leq 0$$

$$y_3 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{-4k}, \infty) \end{cases}$$

$$y_4 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}) \\ 0 & [-\sqrt{-4k}, \sqrt{-4k}] \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & (\sqrt{-4k}, \infty) \end{cases}$$

4c

$$y' \sin x = 2y \ln y$$

"jako" $y' = \underbrace{2y \ln y}_{g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{h(x)}$ $\rightarrow x \in \underbrace{(0 + k\pi, \pi + k\pi)}_{I}$ $k \in \mathbb{Z}$

↳ nulové body $y = 0$ → nelze kvůli logaritmu

$y \equiv 1$

$J = (0,1)$

$= (1, \infty)$

$$\int \frac{1}{2y \ln y}\, dy = \int \frac{1}{\sin x}\, dx$$ → výpočet minule (5d)

$$\underbrace{\frac{1}{2} \ln|\ln y|}_{G(y)} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

↳ $\cos x \neq 1$ $\quad x \neq 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x \neq -1$ $\quad x \neq \pi + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$G((0,1)) = \mathbb{R}$

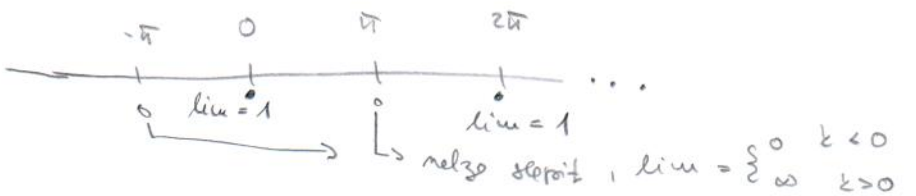
$G((1,\infty)) = \mathbb{R}$

$$\ln|\ln y| = \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + c$$

$$|\ln y| = \underbrace{e^{c}}_{>0} \cdot \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right|$$

$$\ln y = \underbrace{c}_{\in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right)$$

značíme $z_c(x) := y = e^{c \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right)}$ $\quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$



$x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$

$x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Závěr

$$y_0 \equiv 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, 2k\pi] \\ z_c(x) & x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi) \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y_2 = \begin{cases} z_c(x) & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ 1 & x \in [2\pi + 2k\pi, \infty) \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y_3 = \begin{cases} z_{c_1}(x) & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ 1 & x \in [2\pi + 2k\pi, 2\pi + 2l\pi] \\ z_{c_2}(x) & x \in (2\pi + 2l\pi, 3\pi + 2l\pi) \end{cases} \qquad c_{1,2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad k \leq l \in \mathbb{Z}$$

2A

$$y' = \underbrace{x}_{h(x)} \underbrace{e^{-y} \sqrt[3]{e^{y}-1}}_{g(y)}$$

$x \in \mathbb{R}$

$y_0 \equiv 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$g \neq 0$ na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ $= J$

$$\int \frac{e^{y}}{\sqrt[3]{e^{y}-1}}\, dy = \int x \, dx$$

$$\frac{3}{2} \underbrace{\sqrt[3]{(e^{y}-1)^2}}_{\in (0,\infty)} = \frac{x^2}{2} + k$$

$\sqrt[3]{(e^{y}-1)^2} = \frac{x^2}{3} + k \quad \rightsquigarrow$ musí být > 0

$(e^{y}-1)^2 = \left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3$! pozor při odmocňování

$e^{y} = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3} \quad > 0$

$y = \ln\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3}\right)$

rozbor $k > 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$k \leq 0 \quad x \in (-\infty, -\sqrt{-3k})$

$ \quad x \in (\sqrt{-3k}, \infty)$

$\rightsquigarrow \underline{y = \ln\left(1 + \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3}\right)}$

pro $\ln\left(\underbrace{1 - \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3}}_{>0}\right)$ máme:

$1 > \frac{x^2}{3} + k$

$3 - 3k > x^2 > 0$

tedy funguje pro $\boxed{k < 1}$

$|x| < \sqrt{3-3k}$

$k \leq 0$:

tedy $0 < k < 1 \quad y = \ln(1 - \sqrt{}), \quad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k})$

pro $k \leq 0 \quad x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k})$

$ \quad x \in (\sqrt{-3k}, \sqrt{-3k+3})$

Bez lepení:

$y_0 = 0 \qquad x \in \mathbb{R};$

$y_1 = \ln(1 + \sqrt{\quad}) \qquad x \in \mathbb{R} \quad ; k > 0$

$y_2 = \ln(1 - \sqrt{\quad}) \qquad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k}); \ k \in (0, 1)$

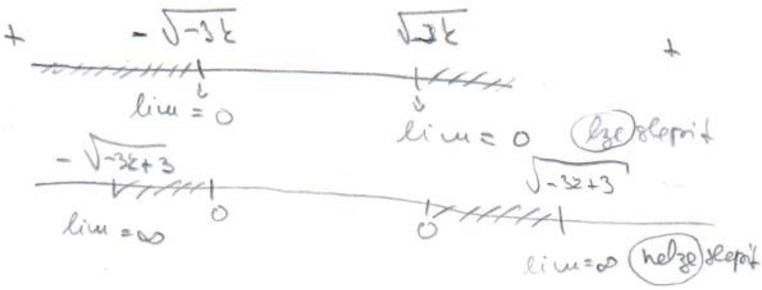
↳ nelze slepit, $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3-3k}} = \infty$

lepení

označme

$z_k^+(x) = \ln(1 + \sqrt{\quad}) \qquad k \leq 0 \ :$

$z_k^-(x) = \ln(1 - \sqrt{\quad})$



kombinace: vždy $k \leq 0 \quad \ell \leq 0$

$$y = \begin{cases} z_k^+(x) & x \in (-\infty, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases} \qquad y = \begin{cases} z_k^-(x) & (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, \sqrt{-3k}] \\ z_k^+(x) & x \in (\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & (-\infty, \sqrt{-3k}] \\ z_k^-(x) & (\sqrt{-3k}, \sqrt{3-3k}) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3k}] \\ z_k^+ & (\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3\ell}] \\ z_\ell^- & (\sqrt{-3\ell}, \sqrt{3-3\ell}) \end{cases} \qquad y \in \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3\ell}] \\ z_\ell^- & (\sqrt{-3\ell}, \sqrt{3-3\ell}) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3\ell}] \\ z_\ell^+ & (\sqrt{-3\ell}, \infty) \end{cases}$$