23. cvičení – ODR se Separovanými proměnnými - lepení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $h : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Rovnici tvaru

$$y' = g(y)h(x)$$

nazveme *ODR se separovanými proměnnými*. *Počátečními podmínkami* rozumíme rovnici $y(x_0) = y_0$.

Věta 2. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $c < d$. Nechť $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ je **spojitá** a $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ je **spojitá a nenulová**. Nechť $[x_0, y_0] \in (a, b) \times (c, d)$.

Označme

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in (a, b),$$

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad y \in (c, d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice $y' = g(y)h(x)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$, které splňují $(x_0 - \delta, x_0 + \eta) \subset (a, b)$ a

$$H(x) \in G((c, d)), \qquad x \in I.$$

Věta 3. Nechť reálná funkce y je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a_+} y'(x)$. Pak existuje $y'_+(a)$ a platí

$$y'_+(a) = \lim_{x \to a_+} y'(x).$$

Levá strana analogicky.

Lemma 4. Nechť $y_1(x) = (a, x_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(x) = (x_0, b) \to \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice

$$y' = F(x, y). \tag{1}$$

Nechť $\lim_{x \to x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim_{x \to x_0+} y_2(x)$. Nechť $F(x, y)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0), \\ y_0, & x = x_0, \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \end{cases}$$

je řešením rovnice v celém (a, b).

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic (nezapomeňte na případná lepení):

   (a) $y' = 2\sqrt{y}$
      i. obecně
      ii. $y(4) = 1$;
      iii. $y(0) = -1$;
      iv. $y(1) = 0$;

   (b) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

   (c) $y' = \sqrt[3]{y}$

   (d) $y' = yx$

   (e) $y' = \sqrt{1 - y^2}$

   (f) $y'y = x^3$

   (g) $y' = x\sqrt[3]{y^2}$

2. Příklady ze starších písemek.

   (a) $y' = x\sqrt[3]{1 - y}$

   (b) $y' = x\sqrt{y}$

   (c) $y' \sin x = 2y \ln y$

   (d) $y' = xe^{-y}\sqrt[3]{e^y - 1}$