20. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$

   Řešení:

   - Funkce f je spojitá na $[0,\infty)$.
   - u 0: Funkce f je spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu $[0,1]$, tedy $\int_0^1 |f|\,\mathrm{d}x$ konverguje.
   - u ∞: Odhadneme
   $$\left|\frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$
   Protože $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$ konverguje, tak ze SK konverguje i $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Závěr: $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

   (b) ♡ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^\alpha x\,\mathrm{d}x$

   Řešení:

   - Funkce f je spojitá na $(0,\frac{\pi}{2})$.
   - u 0: Funkci $\tan x$ u 0 srovnáváme s x, tedy $g(x) = x^\alpha$. Pak
   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan^\alpha x}{x^\alpha} = 1 \in (0,\infty).$$
   Tedy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^\alpha$. Tedy právě tehdy, když $\alpha > -1$.
   - u $\frac{\pi}{2}$: Máme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Funkci $\sin x$ srovnáme s 1, funkci $\cos x$ s $(\frac{\pi}{2} - x)$. Dohromady tedy $g(x) = 1/(\frac{\pi}{2} - x)^\alpha$.
   $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\tan^\alpha x}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^\alpha}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin^\alpha x}{1} \cdot \left(\frac{(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos x}\right)^\alpha = 1 \in (0,\infty).$$
   (Limitu $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos x}$ lze upočítat z L'Hospitala.)

   Tedy $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^{-\alpha}$. Tento integrál lze přímo spočítat a dostaneme, že konverguje právě tehdy, když $\alpha < 1$.

   Závěr: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-1,1)$.

   (c) ❀ $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x$

   Řešení:

   - Funkce f je spojitá na $(0,\pi)$. Navíc $f \le 0$, budeme tedy vyšetřovat $|f| = -\log(\sin x)$.

- u 0: Funkci $\sin x$ u 0 srovnáváme s x, tedy zvolme $g(x) = -\log x$. Pak
$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\log(\sin x)}{-\log x} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1 \in (0,\infty).$$
Tedy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\log x$, který ale konverguje (lze upočítat).
- u π: Funkci $\sin x$ srovnáme s $(\pi - x)$, Tedy $g(x) = -\log(\pi - x)$.
$$\lim_{x\to \pi-} \frac{-\log(\sin x)}{-\log(\pi - x)} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to \pi-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{(\pi-x)}} = 1 \in (0,\infty).$$
(Limitu $\lim_{x\to\pi} \frac{(\pi-x)}{\sin x}$ lze upočítat z L'Hospitala.)
Tedy $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\log(\pi - x)$. Tento integrál lze přímo spočítat a zjistíme, že konverguje.

Závěr: $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(d) $\ast \displaystyle\int_1^{\infty} \sin(x^{\alpha})\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $[1,\infty)$.
- $\alpha = 0$, pak $f(x) = \sin 1$ a integrál diverguje.
- $\alpha < 0$: x^{α} jde u ∞ do 0, budeme tedy srovnávat $\sin x^{\alpha}$ s $g(x) = x^{\alpha}$ (míříme k známé limitě $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$).
$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\sin x^{\alpha}|}{x^{\alpha}} = 1 \in (0,\infty).$$
Tedy $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{\infty} x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.
- $\alpha > 0$: Nejprve substituujeme $y = x^{\alpha}$, pak $\mathrm{d}y = \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$, meze budou $(1,\infty)$. Tedy
$$\int_1^{\infty} \sin(x^{\alpha})\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} \sin(x^{\alpha}) \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin y\,\mathrm{d}y$$
Převedli jsme na známý integrál, který absolutně konverguje právě tehdy, když $\frac{1}{\alpha} - 1 < -1$, tedy pro $\alpha < 0$. Jelikož jsme ale předpokládali, že $\alpha > 0$, tak původní integrál absolutně nekonverguje pro žádné $\alpha > 0$.

Závěr: $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $[0,\infty)$.
- u ∞ budeme srovnávat s e^{-x}. Pro $x \geq 1$ máme
$$\begin{aligned} e^{-x^2} &\leq e^{-x} \\ -x^2 &\leq -x \\ x &\leq x^2 \end{aligned}$$

Protože $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ konverguje (lze přímo upočítat), tak ze srovnávacího kritéria konverguje i $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$

Závěr: $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(f) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Lze přímo spočítat (per partes)

$$\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x = [x\log x]_0^1 - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x\log x]_0^1 - [x]_0^1 = -1.$$

Závěr: integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(g) ❆ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0,1]$.
- $p=0$, pak $f(x)=\frac{\sin 1}{x^q}$ a tedy integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $q<1$.
- $p>0$: x^p jde u 0 do 0, budeme tedy srovnávat $\sin x^p$ s x^p. Celkem máme $g(x)=\frac{x^p}{x^q}$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{|\sin x^p|}{x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = 1 \in (0,\infty).$$

  Tedy $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 x^{p-q}\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $p-q>-1$.
- $p<0$: Analogicky příkladu (1d): substituujeme $y=x^p$ (tedy $y^{1/p}=x$), pak $\mathrm{d}y = px^{p-1}\,\mathrm{d}x$, meze budou $(1,\infty)$. Tedy

$$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,\mathrm{d}x = -\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{\frac{q}{p}}}\cdot\frac{1}{p}\cdot y^{\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{p}\int_1^\infty \sin y\cdot y^{\frac{1}{p}-1-\frac{q}{p}}\,\mathrm{d}y$$

  Převedli jsme na známý integrál, který absolutně konverguje právě tehdy, když $1+\frac{q}{p}-\frac{1}{p}>1$, tedy pro $\frac{q-1}{p}>0$. Protože $p<0$, máme $q-1<0$.

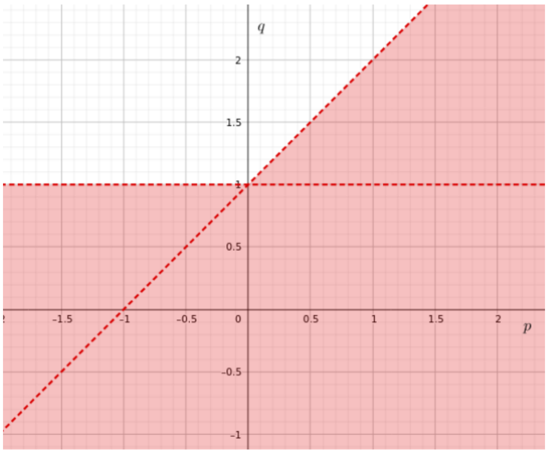
Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když

$$(p=0\ \&\ q<1)\vee(p>0\ \&\ p-q>-1)\vee(p<0\ \&\ q<1)$$

lze psát i

$$(q<1\ \&\ p\in\mathbb{R})\vee(q\geq 1\ \&\ p>q-1)$$

Vztahy p a q jsou znázorněny na obrázku



(h) i. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0,1)$.
- u 0:

  A. $k \geq 0$: Pak $x^k \leq 1$, tedy „1 vede nad x^k“. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{1}$.

  $$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{|\log x|^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^k} = \begin{cases} 1, & k>0, \\ \frac{1}{2}, & k=0, \end{cases} \in (0,\infty).$$

  Tedy $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 |\log x|^\alpha\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha \in \mathbb{R}$.

  B. $k < 0$: Pak $1 \leq x^k$, tedy „x^k vede nad 1“. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}$.

  $$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\log x|^\alpha}{x^k}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^k}{1+x^k} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^{-k}} = 1 \in (0,\infty).$$

  Tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha \in \mathbb{R}$.

- u 1: $|\log x|$ budeme srovnávat s $|1-x|$, dohromady tedy $g(x) = |1-x|^\alpha$.

  $$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{|1-x|^\alpha} = \frac{1}{2} \in (0,\infty).$$

  Tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 |1-x|^\alpha\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$ (lze přímo upočítat nebo substituovat $y = 1-x$ a převést na známý integrál).

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.

ii. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(1, \infty)$.
- u 1 postupujeme analogicky jako v předchozím příkladě. Zjistíme, že $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.
- u ∞:

A. $k \geq 0$: Pak $x^k \geq 1$, tedy „x^k vede nad 1“. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\log x|^\alpha}{x^k}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^k}{1+x^k} = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ \frac{1}{2}, & k = 0, \end{cases} \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $(k > 1, \alpha \in \mathbb{R})$ nebo $(k = 1, \alpha < -1)$.

B. $k < 0$: Pak $1 \geq x^k$, tedy „1 vede nad x^k“. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{1}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\log x|^\alpha}{1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^k} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty |\log x|^\alpha\,\mathrm{d}x$, který ale diverguje pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$.

Závěr: $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $k > 1 \,\&\, \alpha > -1$.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0, 1]$.
- Protože $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$, tak lze funkci spojitě rozšířit do 0. Tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje.

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(1, 2]$.
- u 1: máme $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$. Funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1+} \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} = \frac{e}{\sqrt{2}} \in (0, \infty)$$

Tedy $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje (lze přímo spočítat).

Závěr: $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(k) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \arctan^\beta x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0,\infty)$.
- u 0: funkci $\arctan x$ srovnáváme s x. Dohromady tedy funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = x^\alpha x^\beta$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \arctan^\beta x}{x^\alpha x^\beta} = 1 \in (0,\infty)$$

  Tedy $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta}$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha+\beta > -1$.
- u ∞: funkci $\arctan x$ srovnáváme s $\frac{\pi}{2}$. Dohromady tedy funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = x^\alpha (\frac{\pi}{2})^\beta$.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^\alpha \arctan^\beta x}{x^\alpha (\frac{\pi}{2})^\beta} = 1 \in (0,\infty)$$

  Tedy $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha+\beta > -1$, $\alpha < -1$.

(l) $\displaystyle\int_0^\infty x^a + x^b \,\mathrm{d}x$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0,\infty)$, navíc $x^a > 0$ a $x^b > 0$ na $(0,\infty)$.
- u 0: $\int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a > -1$. Analogicky $\int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $b > -1$.
  Dohromady tedy $\int_0^1 x^a + x^b\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a > -1$, $b > -1$. (Lze i přímo upočítat.)
- u ∞: $\int_1^\infty x^a\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a < -1$. Analogicky $\int_1^\infty x^b\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $b < -1$.
  Dohromady tedy $\int_1^\infty x^a + x^b\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a < -1$, $b < -1$. (Lze i přímo upočítat.)

Závěr: $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

(m) $\displaystyle\int_0^1 x^{\log x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkci přepíšeme $f(x) = x^{\log x} = e^{\log x \log x} = e^{\log^2 x}$. Tedy funkce f je spojitá na $(0,1]$.
- u 0: Na intervalu $(0, \frac{1}{e})$ platí $\log x < -1$. Tedy

$$x^{\log x} > x^{-1}$$

  Protože $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverguje, tak ze srovnávacího kritéria diverguje i integrál $\int_0^{\frac{1}{e}} x^{\log x}\,\mathrm{d}x$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

(n) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(1,2]$.
- u 1: funkci $\arctan(x-1)$ srovnáváme s $(x-1)$ (chová se jako arctan u 0). Funkci $(x-\sqrt{x}) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$ budeme srovnávat s $(\sqrt{x}-1)$. Dohromady tedy funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)^p} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^p} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}$.

$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)^p}} = \lim_{x\to 1+} \frac{(\sqrt{x}-1)^p}{(x-\sqrt{x})^p} = \lim_{x\to 1+} \frac{(\sqrt{x}-1)^p}{(\sqrt{x})^p(\sqrt{x}-1)^p}$$
$$= 1 \in (0,\infty)$$

  Tedy $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}$.
- Konvergence integrálu $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}$: Substituce $y=\sqrt{x}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{y+1}{(y-1)^{p-1}} 2y\,\mathrm{d}y$$

  Integrál srovnáme s $h(y) = \frac{1}{(y-1)^p}$. Pak

$$\lim_{y\to 1+} \frac{\frac{y+1}{(y-1)^{p-1}}2y}{\frac{1}{(y-1)^p}} = 4 \in (0,\infty)$$

  Tedy $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{y+1}{(y-1)^{p-1}} 2y\,\mathrm{d}y$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{(y-1)^{p-1}}\,\mathrm{d}y$, což je právě tehdy, když $1-p>-1$, tedy $p<2$.

Závěr: $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $p<2$.

(o) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- $p=0$, pak $f\equiv 0$ a integrál konverguje.
- $p>0$, pak u 0 LSK s $g(x) = \frac{px}{x^n}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{px}{x^n}} = 1,$$

  tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_0^1 px^{1-n}$ konverguje $\Leftrightarrow 1-n>-1 \Leftrightarrow 2>n$.
  U ∞ LSK s $g(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}} = 1.$$

  Tedy $\int_1^\infty f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_1^\infty x^{-n}$ konverguje $\Leftrightarrow n<1$.
- $p<0$: funkce $\arctan x$ je lichá, tedy $\arctan px = -\arctan|p|x$ pro $x\in(0,\infty)$ a tedy konvergence vyjde stejně jako pro $p>0$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje pro $p=0$ a $n\in\mathbb{N}$. Jinak diverguje.

(p) ❀ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(-1,1)$. Funkci rozepíšeme jako
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x^2}}$$
- u -1 srovnáváme s $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Máme
$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-1+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} = \lim_{x\to-1+}\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\in(0,\infty)$$
tedy $\int_{-1}^0 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$, který konverguje (lze přímo spočítat).
- u 1 srovnáváme s $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Máme
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to1-}\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\in(0,\infty)$$
tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$, který konverguje (lze přímo spočítat).

Závěr: $\int_{-1}^1 f(x)$ konverguje.

(q) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\log^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0,\frac{1}{2}]$.
- u 0: máme $\arcsin(x^2+x^3)=\arcsin(x^2(1+x))$, budeme ho srovnávat s x^2. Funkci $\log(1+x)$ srovnáváme s x. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x)=\frac{x^2}{x\cdot x^2}$. Máme
$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0+}\frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\log^2(1+x)}}{\frac{x^2}{x\cdot x^2}} = \lim_{x\to0+}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2(1+x)}\cdot\frac{x^2}{\log^2(1+x)}\cdot(1+x) = 1\in(0,\infty),$$
tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, který diverguje.

Závěr: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ diverguje.

2. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,\infty)$, $a>0$. Nechť existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α?

Řešení: Jde vlastně o LSK s funkcí $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ na intervalu $[a,\infty)$. Tedy

(a) $A\in(0,\infty)$: $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha>1$. (Speciálně tedy diverguje pro $\alpha\le1$.)

(b) $A = 0$: Jestliže $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha > 1$, tak konverguje i $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $\alpha \leq 1$ nelze nic říci.

(c) $A = \infty$: Jestliže $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverguje, což je právě tehdy, když $\alpha \leq 1$, tak diverguje i $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $\alpha > 1$ nelze nic říci.

3. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $\lim_{x\to b-} f(x)\cdot (x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α?

Řešení: Jde vlastně o LSK s funkcí $g(x) = \frac{1}{(x-b)^\alpha}$ na intervalu $[a, b)$. Tedy

(a) $A \in (0, \infty)$: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje $\Leftrightarrow \int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha < 1$. (Speciálně tedy diverguje pro $\alpha \geq 1$.)

(b) $A = 0$: Jestliže $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha < 1$, tak konverguje i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $\alpha \geq 1$ nelze nic říci.

(c) $A = \infty$: Jestliže $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverguje, což je právě tehdy, když $\alpha \geq 1$, tak diverguje i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $\alpha < 1$ nelze nic říci.

4. Ukažte divergenci pomocí B-C podmínky.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha \log(1+x)|\cos x|\,\mathrm{d}x$, $\alpha \geq 0$.

Řešení: Pro $x \in [1, \infty)$ máme $x^\alpha \log(1+x) \geq \log 2$.

Dále uvažujme intervaly tvaru $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi)$. Odhadujme

$$\int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+k\pi} |x^\alpha \log(1+x)\cos x|\,\mathrm{d}x \geq \int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+k\pi} \log 2|\cos x|\,\mathrm{d}x = 2\log 2$$

Položme $\varepsilon = \log 2$. Pro $b' > 1$ najdeme k: $\frac{\pi}{2} + k\pi > b'$. Pak položme $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{2} + k\pi$.

Pak

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| \geq 2\log 2 > \varepsilon,$$

Tedy integrál nesplňuje BC podmínku.

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \arctan x \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \leq -3$.

Řešení: Máme: f je spojitá na $(0, 1]$, „problém je u 0“.

Funkci f přepíšeme

$$f = x^{\alpha+2}\arctan x \cdot \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

(abychom mohli později substituovat).

Odhadneme první část:

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha+2}\arctan x = \lim_{x\to 0+} \frac{\arctan x}{x} x^{\alpha+3} = \begin{cases} 1, & \alpha = -3, \\ \infty, & \alpha < -3. \end{cases}$$

Tedy existuje $x_0 \in (0,1)$ takové, že pro všechna $x \in (0, x_0)$ platí

$$x^{\alpha+2} \arctan x > \frac{1}{2}.$$

Dále uvažujme intervaly tvaru $((\frac{3\pi}{2} + k\pi)^{-1}, (\frac{5\pi}{2} + k\pi)^{-1})$ pro k takové, že $\frac{3\pi}{2} + k\pi)^{-1} < x_0$. Odhadujme

$$\int_{(\frac{3\pi}{2}+k\pi)^{-1}}^{(\frac{5\pi}{2}+k\pi)^{-1}} x^{\alpha+2} \arctan x \cdot \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \geq \int_{(\frac{3\pi}{2}+k\pi)^{-1}}^{(\frac{5\pi}{2}+k\pi)^{-1}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

(Integrál $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ lze substituovat $y = \frac{1}{x}$.)
Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pro $b' < 1$ najdeme k tak, že $(\frac{3\pi}{2} + k\pi)^{-1} < b'$ a zároveň $(\frac{3\pi}{2} + k\pi)^{-1} < x_0$.
Pak položme $x_1 = (\frac{3\pi}{2} + k\pi)^{-1}$ a $x_2 = (\frac{5\pi}{2} + k\pi)^{-1}$.
Pak

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \geq 1 > \varepsilon.$$

Tedy integrál nesplňuje BC podmínku.