



18. cvičení – Určitý integrál 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. • Necht' $a, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c$, $b \in (a, c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$ a f je **spojitá** v b , pak $f \in \mathcal{N}(a, c)$ a platí

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

• Necht' $a, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c$, $b \in (a, c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a, c)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$ a platí

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Poznámka 2. Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval a necht' $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je *darbouxovská*, jestliže pro každé $a, b \in M$, $a < b$, a pro každé $y \in (\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\})$ existuje $c \in [a, b]$, takové, že $f(c) = y$.

Příklady

Spočtete Newtonovy integrály:

1. $\int_4^\infty \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

2. $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3-1} dx$

3. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$

4. $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 3} dx$

5. $\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

7. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$

8. $\int_0^1 \arccos^2 x dx$

9. $\int_0^1 x \arcsin x dx$

10. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

11. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$

12. $\int_4^\infty \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x-2}{x-4}} dx$

13. $\int_0^{4\pi} \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$

Zkouškové příklady

doc. Rokyty: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html>

prof. Spurného: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma2.php#>

$$15. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 + \cos x}{3 + \sin x + \cos x} dx$$

$$16. \int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2} dx$$

$$17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2} dx$$

$$18. (R) \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)} dx$$

$$19. \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + \sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx$$

$\frac{x}{\tan t} = t \quad (14)$ $\frac{x}{\tan t} = t \quad \text{pak } t = \arctan \frac{x}{t} \quad (13)$	$\sqrt{\frac{x-x}{2-x}} = t \quad (12)$ $\sqrt{\frac{x}{1+x}} = t \quad (11)$ $\sqrt{x} \sin t = x \quad (10)$	$t \sin x = x \quad (6)$ $t \cos x = x \quad (8)$ $ x \sin x \cos x = (9)$ $(x \sin x)^{\frac{2}{3}} = x \cos x \sin x \quad (5)$
---	--	--