17. cvičení – Určitý integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. (a) $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2.$$

(b) $\int_1^2 3x^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_1^2 3x^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}x = [x^3 + x^2 + x]_1^2 = (2^3 + 2^2 + 2^1) - (1^3 + 1^2 + 1^1) = 11,$$

(c) $\int_1^2 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_1^2 2+\sqrt{x}+\frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = \left[2x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = 2\cdot 2+\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-\frac{1}{2}-\left(2\cdot 1 + \frac{2}{3}\sqrt{1^3} - \frac{1}{1}\right) = \frac{11}{6}+\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

(d) $\int_{-5}^0 \frac{2}{3-4x} \,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_{-5}^0 \frac{2}{3-4x} \,\mathrm{d}x = \left[2\frac{\ln|3-4x|}{-4}\right]_{-5}^0 = -\frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 23)$$

(e) $\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \,\mathrm{d}x = \left[-2\sqrt{2-x}\right]_{-7}^{-2} = -2(2-3) = 2.$$

(f) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = [\arctan x]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \arctan x - \lim_{x\to 0+} \arctan x = \frac{\pi}{2} - 0.$$

(g) $\int_2^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = [\ln x]_2^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \lim_{x\to 2+} \ln x = \infty - \ln 2 = \infty.$$

Tedy integrál diverguje.

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \, \mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, \mathrm{d}x = [e^x]_{-\infty}^{0} = \lim_{x\to 0-} e^x - \lim_{x\to -\infty} e^x = 1 - 0 = 1.$$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^x \, \mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_{0}^{\infty} e^x \, \mathrm{d}x = [e^x]_{0}^{\infty} = \lim_{x\to \infty} e^x - \lim_{x\to 0+} e^x = \infty - 1 = \infty.$$

Tedy integrál diverguje.

(j) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$ **Řešení:**

$$\int_{0}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_{0}^{\infty} = \lim_{x\to \infty} (-\cos x) - \lim_{x\to 0+} (-\cos x)$$

Ježto první limita neexistuje, neexistuje ani Newtonův integrál $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$.

2. (a) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3x^2}{x^3+1} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Substituce $y = x^3 + 1,\ \mathrm{d}y = 3x^2 \, \mathrm{d}x$, meze budou 2 a 9.

$$\int_{1}^{2} \frac{3x^2}{x^3+1} \, \mathrm{d}x = \int_{2}^{9} \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = [\ln |y|]_{2}^{9} = \ln 9 - \ln 2.$$

Máme $\varphi(x) = x^3 + 1$. Interval $(\alpha, \beta) = (1, 2)$. Pak φ je spojitá na celém $[1, 2]$. Derivace $\varphi' = 3x^2$ je vlastní a spojitá na $[1, 2]$. Dále $\varphi(1) = 2$ a $\varphi(2) = 9$.
Jiná verze: Máme $\varphi(x) = x^3 + 1$. Interval $(\alpha, \beta) = (1, 2)$. Derivace $\varphi' = 3x^2$ je vlastní na $(1, 2)$. Dále $\varphi(1, 2) = (2, 9) = (a, b)$. Funkce φ je tam na a navíc tam má nenulovou derivaci $\varphi(x) = 3x^2$. Integrál na pravé straně navíc existuje (spojitá funkce na uzavřeném intervalu).

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$

Řešení:

Substituce $y = \sin x,\ \mathrm{d}y = \cos x \, \mathrm{d}x$, meze budou $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ a $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} y \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{8}.$$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{2} x \ln x \, \mathrm{d}x$

Řešení: Per partes

$$\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Dvakrát per partes

$$\int_0^\pi x^2\sin x\,\mathrm{d}x = [-x^2\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2x\cos x\,\mathrm{d}x = [-x^2\cos x + 2x\sin x]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin x =$$

$$[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

(e) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Substituce $y = \ln x,\ \mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, meze 0 a 1.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 1 + \frac{-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [x - \arctan x]_{-1}^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5}$

Řešení:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5} = \left[\frac{-1}{4(x+3)^4}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{4(x+3)^4} - \lim_{x\to 0+}\frac{-1}{4(x+3)^4} = \frac{1}{4\cdot 81}$$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Prve substituce $y = e^x,\ \mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$,

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \int_1^e \frac{1}{y^2+1} = [\arctan y]_1^e = \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = [\tan x]_0^1 = \tan\, 1.$$

Celkem

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \arctan e - \frac{\pi}{4} + \tan\, 1$$

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Substituce $y=\sqrt{x}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty 2e^{-y}\,\mathrm{d}y = 2\left[-e^{-y}\right]_1^\infty = -2(\lim_{y\to\infty} e^{-y} - \lim_{x\to 1+} e^{-y})$$
$$= -2\left(0-\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}.$$

(j) $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x,\ a<0,\ b>0$

Řešení: Integrál neexistuje, protože funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá na daném intervalu (kolem nuly) primitivní funkci - není totiž darbouxovská.

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Substituce $y=\arctan x$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$:

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}.$$

(l) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

Řešení: Substituce $y=\ln x$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = [\ln y]_0^{\ln 2} = \lim_{y\to\ln 2-} \ln y - \lim_{y\to 0+} \ln y = \ln(\ln 2) - (-\infty) = \infty.$$

Tedy integrál diverguje.

(m)
$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $y=\cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = [\arctan y]_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(n) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Dvakrát per partes:

$$\int_{-1}^1 x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2e^{-x}\right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2e^{-x}\right]_{-1}^1 + \left[-2xe^{-x}\right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]_{-1}^1 = e - 5e^{-1}$$

(o) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 x + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x-1|\right]_2^3 = \frac{9}{2} + \ln 2 - \left(\frac{4}{2} + \ln 1\right) = \frac{5}{2} + \ln 2.$$