



## 16. cvičení – Odmocniny

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Příklady

Najděte primitivní funkce

1. typ  $R(x, \sqrt[m]{x+a})$

$$(a) \quad g(x) = \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$$

**Řešení:**

Použijeme substituci  $t = \sqrt[6]{x}$ . Pak platí vztah  $t^6 = x$ . Potom pro substituci 1. typu

$$dt = \left(x^{1/6}\right)' dx = \frac{1}{6}x^{-5/6} dx$$

(Pozn.: Pro 2. větu o substituci bychom měli  $t^6 = x$ , tedy  $dx = 6t^5 dt$ .) Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} \cdot \frac{6x^{5/6}}{6x^{5/6}} dx \rightarrow \int \frac{1}{t^6(1+2t^3+t^2)} 6t^5 dt = 6 \int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)} dt.$$

Trojčlen ve jmenovateli má zřejmě kořen  $-1$  a lze jej tedy rozložit na tvar  $(t+1)(2t^2-t+1)$ . Dále postupujeme rozkladem na parciální zlomky.

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}$$

Přenásobením jmenovateli dostaneme

$$1 = A(t+1)(2t^2-t+1) + Bt(2t^2-t+1) + (Ct+D)t(t+1).$$

Dosazením  $t = 0$  a  $t = -1$  dostaneme, že  $A = 1$  a  $B = -\frac{1}{4}$ . Porovnáním koeficientu u  $t^3$  máme, že  $2A+2B+C = 0$ , tedy  $C = -2A-2B = -\frac{3}{2}$ , a porovnáním koeficientů u lineárního členu máme, že  $B+D = 0$ , tedy že  $D = -B = \frac{1}{4}$ . Odtud vyplývá, že

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{8} \frac{6t-1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

Integrály prvních dvou členů jsou zřejmé, poslední člen integrujeme dalším rozkladem na

$$\frac{1}{8} \frac{6t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} \frac{2t-\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} \frac{1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

První ze sčítanců pak lze integrovat substitucí jmenovatele, druhý převodem na čtverec. Kombinací všech výsledků dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx &\rightarrow 6 \int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)} dt \\ &\stackrel{C}{=} 6 \ln t - \frac{3}{2} \ln(1+t) - \frac{9}{4} \ln(2t^2-t+1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} \ln x - \frac{3}{2} \ln(1 + \sqrt[6]{x}) - \frac{9}{4} \ln(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{7}}.$$

Lze ještě upravit jako

$$= \frac{3}{4} \ln \frac{x\sqrt[3]{x}}{(1 + \sqrt[6]{x})^2 (2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1)^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{7}}$$

Původní funkce je spojitá (a definovaná) na  $(0, \infty)$  - tam budeme hledat primitivní funkci.

Při 1. větě o substituci máme  $\varphi(x) = \sqrt[6]{x}$ ,  $\varphi' = \frac{1}{6\sqrt[5]{x^5}}$  a  $f(t) = \frac{6}{t(1+t^2+2t^3)}$ .

Interval  $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$  a  $\varphi(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ .

Funkce  $f$  má primitivní funkci na  $(-\infty, 0)$  nebo  $(0, \infty)$ . Zvolme  $(a, b) = (0, \infty)$ .

Pak  $\varphi(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ .

Při 2. větě o substituci máme  $\varphi(t) = t^6$ ,  $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[6]{x}$ .  $\varphi' = 6t^5$ . Dále  $f(x) = \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$  a  $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{6}{t(1+t^2+2t^3)}$ . Nakonec

$$G(t) = 6 \ln t - \frac{3}{2} \ln(1+t) - \frac{9}{4} \ln(2t^2 - t + 1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}}$$

Intervaly:  $t \in (\alpha, \beta) = (0, \infty)$  a  $\varphi(\alpha, \beta) = (0, \infty) = (a, b)$ .

Platí, že  $\varphi'(t) \neq 0$  na  $(\alpha, \beta)$ . Výsledný integrál pak máme na  $(a, b) = (0, \infty)$ .

(b)  $g(x) = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$ .

**Řešení:**

Použijeme substituci  $t = \sqrt[6]{x+1}$ . Potom  $dx = 6t^5 dt$  a

$$\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx \rightarrow \int \frac{1 - t^3}{1 + t^2} 6t^5 dt.$$

Protože

$$(-t^8 + t^5) : (t^2 + 1) = -t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{1+t^2}$$

je

$$\begin{aligned} \int \frac{1-t^3}{1+t^2} 6t^5 dt &= 6 \int \left( -t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{1}{2} \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3 \ln(1+t^2) - 6 \arctan t, \\ \rightarrow \int g(x) dx &\stackrel{C}{=} -\frac{6}{7}(\sqrt[6]{x+1})^7 + \frac{6}{5}(\sqrt[6]{x+1})^5 + \frac{3}{2}(\sqrt[6]{x+1})^4 - 2(\sqrt[6]{x+1})^3 - 3(\sqrt[6]{x+1})^2 \\ &\quad + 6(\sqrt[6]{x+1}) + 3 \ln(1 + (\sqrt[6]{x+1})^2) - 6 \arctan(\sqrt[6]{x+1}) \end{aligned}$$

Pro  $x \in (-1, \infty)$ .

(c)  $g(x) = \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}$ .

**Řešení:**

Použijeme substituci  $t = \sqrt[4]{x}$ . Potom

$$dt = \frac{1}{4}x^{-3/4} dx$$

. Odtud

$$\int \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}} dx \rightarrow \int \frac{4t^3}{(1+t)^3 t^2} dt = \int \frac{4t}{(1+t)^3} dt.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(1+t)^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3}.$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$4t = A(1+t)^2 + B(1+t) + C,$$

odkud dosazením  $t = -1$  dostáváme, že  $C = -4$ . Dále máme, že

$$4t = (A+B+C) + (2A+B)t + At^2,$$

odkud ihned máme, že  $A = 0$  a  $B = 4$ . Tudíž

$$\begin{aligned} \int \frac{4t}{(1+t)^3} dt &= \int \left( \frac{4}{(1+t)^2} - \frac{4}{(1+t)^3} \right) dt \stackrel{C}{=} -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} \\ &= -\frac{2+4t}{(1+t)^2} \rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{2+4\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^2}. \end{aligned}$$

Pro  $x \in (0, \infty)$ .

2. typ  $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

(a)  $g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$ .

**Řešení:** Definičním oborem funkce  $g$  je interval  $[1, +\infty)$ , maximální otevřenou podmnožinou je interval  $(1, +\infty)$ . Primitivní funkci stačí určit na tomto intervalu.

Výraz nejprve upravíme vytknutím

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}$$

a poté použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

odkud máme

$$x = -\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = -\frac{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{-4t}{(1-t^2)^2} dt.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} dx \rightarrow \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{-4t}{(1-t^2)^2} dt$$

standardním rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{(t+1)^3} - \frac{\frac{1}{2}}{t-1} dt$$

a po integraci

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{2} \ln|1-t| + \frac{1}{2} \ln|t+1|$$

zbývá dosadit za  $t$ :

$$\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} + \frac{1}{(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1)^2} - \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right|$$

(b)  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ .

**Řešení:**

Upravme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \frac{1}{(x-1)^2} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2/3}$$

a použijeme substituci

$$t = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{1/3}, \quad x = \frac{t^3+1}{1-t^3}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2(1-t^3) + 3t^2(1+t^3)}{(1-t^3)^2} = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}.$$

Odtud také vyplývá, že

$$x-1 = \frac{t^3+1}{1-t^3} - 1 = \frac{2t^3}{1-t^3}.$$

Dostáváme tak, že

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= \int \frac{1}{(x-1)^2} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2/3} dx \rightarrow \int \frac{(1-t^3)^2}{4t^6} \cdot t^2 \cdot \frac{6t^2}{(1-t^3)^2} dt \\ &= \int \frac{3}{2t^2} dt \stackrel{C}{=} -\frac{3}{2t} \rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \end{aligned}$$

Pro  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ .

(c)

$$g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{x}$$

**Řešení:**

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$$

tedy

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} dx &\rightarrow \int t \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{-4t dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{-4t^2 dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2} dt \stackrel{C}{=} \\ &2 \arctan t - \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \right| \end{aligned}$$

Pro  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ .

3. typ  $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

(a)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx$$

**Řešení:** Substituce  $\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{1}x = t$

$$x = \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}$$

$$dx = \frac{-t^2 + 2t - 4}{2(1-t)^2} dt$$

tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx &\rightarrow \int \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)} \frac{1}{t + \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}} \frac{-t^2 + 2t - 4}{2(1-t)^2} dt \\ &= \int \frac{1}{2} \frac{(t+2)(t-2)}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{2} \int 1 + 2 \frac{t-1}{(t-1)^2} - \frac{3}{(t-1)^2} dt \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \left( t + 2 \ln |t-1| + \frac{3}{t-1} \right) \\ &\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \left( \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x + 2 \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1| \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1} \right) \end{aligned}$$

Pro  $x \in \mathbb{R}$ .

(b)

$$g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}}$$

**Řešení:** Příklad i s řešením máme z <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html>

Podmínky:  $-x^2 + x = 2 \geq 0$ , tedy  $x \in (-1, 2)$  (integrujeme na otevřeném intervalu). Zároveň máme 2 různé reálné kořeny, tedy výraz upravíme

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}} dx = \int \frac{1}{1 + \sqrt{(2-x)(x+1)}} dx = \int \frac{1}{1 + (x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}} dx$$

Zvolme substituci

$$t = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$$

Pak

$$x = \frac{2-t^2}{t^2+1}$$

a

$$dx = \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt.$$

Máme

$$\begin{aligned} &\rightarrow \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2-t^2}{t^2+1} + 1\right)t} \cdot \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{-6t}{(1+t^2)(t^2+3t+1)} dt \\ &= \int \frac{-2}{1+t^2} + \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{5}}{2t+3+\sqrt{5}} \\ &\stackrel{C}{=} -2 \arctan t - \frac{4\sqrt{5}}{5} \log |2t+3+\sqrt{5}| - \frac{4\sqrt{5}}{5} \log |-2t-3+\sqrt{5}| \\ &\rightarrow \int \frac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}} dx \stackrel{C}{=} -2 \arctan \sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - \frac{4\sqrt{5}}{5} \log \left| 2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + 3 + \sqrt{5} \right| \\ &\quad - \frac{4\sqrt{5}}{5} \log \left| -2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - 3 + \sqrt{5} \right| \end{aligned}$$

$$x \in (-1, 2)$$

(c)

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

**Řešení:** Příklad i s řešením máme z <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html>

Funkce je spojitá na intervalech  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, \infty)$ , má na nich tedy primitivní funkci. Výraz  $x^2 + x + 1$  nemá reálné kořeny. Zvolme substituci

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$$

Pak

$$x = \frac{1-t^2}{2t-1}$$

a

$$dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \rightarrow \int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t-1}-1\right)\left(\frac{1-t^2}{2t-1}+t\right)} \cdot \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt &= \int \frac{2}{t^2+2t-2} dt \\ &= \int \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{t+1+\sqrt{3}} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-t-1+\sqrt{3}} dt \stackrel{C}{=} -\frac{\sqrt{3}}{3} \log|t+1+\sqrt{3}| + \frac{\sqrt{3}}{3} \log|-t-1+\sqrt{3}| \\ \rightarrow \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} dx &\stackrel{C}{=} -\frac{\sqrt{3}}{3} \log|\sqrt{x^2+x+1}-x+1+\sqrt{3}| \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{3} \log|-\sqrt{x^2+x+1}-x-1+\sqrt{3}| \end{aligned}$$

(d)

$$g(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

**Řešení:** Příklad i s řešením máme z <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html>

Podmínky:

$$x + \sqrt{x^2 - x + 1} \neq 0,$$

což je splněno pro všechna  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Funkce je tedy spojitá na celém  $(-\infty, \infty)$ , kde má také primitivní funkci.

Výraz  $x^2 - x + 1$  nemá reálné kořeny. Zvolme substituci

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = -x + t$$

Pak

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1}$$

a

$$dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt &= \int \frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2} dt \\ &\stackrel{C}{=} 2 \log|t| - \frac{3}{2} \log|2t-1| - \frac{3}{2(2t-1)} \\ \rightarrow \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} dx &\stackrel{C}{=} 2 \log|\sqrt{x^2 - x + 1} + x| \\ &\quad - \frac{3}{2} \log|2(\sqrt{x^2 - x + 1} + x) - 1| \\ &\quad - \frac{3}{2(2(\sqrt{x^2 - x + 1} + x) - 1)} \end{aligned}$$

$$x \in (-\infty, \infty)$$

4. Ostatní

$$(a) g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$$

**Řešení:**

Použijeme substituci

$$t = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}.$$

Potom

$$x = \left(\frac{t^2 - 1}{2t}\right)^2, \quad dx = 2 \cdot \frac{t^2 - 1}{2t} \cdot \frac{4t^2 - 2t^2 + 2}{4t^2} dt = \frac{t^2 - 1}{t} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$$

a máme

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &\rightarrow \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)(t^2+1)}{t^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) dt \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \left(t - \ln|t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right) \\ &\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x} - \ln|\sqrt{x} + \sqrt{1+x}| - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{x} + (\sqrt{1+x})^2}\right). \end{aligned}$$

Pro  $x \in (0, \infty)$ .