16. cvičení – Odmocniny

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (druhá věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě **nenulovou vlastní** derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Příklady

Najděte primitivní funkce

1. typ $R\left(x, \sqrt[m]{x+a}\right)$
   - (a) $g(x) = \dfrac{1}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$.
   - (b) ♡ $g(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$.
   - (c) $g(x) = \dfrac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \cdot \sqrt{x}}$.
2. typ $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$
   - (a) ❄ $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.
   - (b) ★ $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.
   - (c) $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \dfrac{1}{x}$
3. typ $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$
   - (a) ❀ $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$
   - (b) ✤ $g(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}}$
   - (c) ❉ $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$
   - (d) ❋ $g(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$
4. Ostatní
   - (a) ♡ $g(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$.

(1b) $t = \sqrt[6]{x+1}$
(2a) vytkněte $\sqrt{x-1}$
(2b) vytkněte $(x-1)^2$
(3a) $t = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x$
(3b) $t = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$
(3c) $t = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$
(3d) $t = \sqrt{x^2 - x + 1} + x$
(4a) $t = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}$