15. cvičení – Goniometrické substituce + lepení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť f je **spojitá** funkce na otevřeném intervalu I. Potom f má na I primitivní funkci.

Věta 2. Nechť f, F jsou **spojité** funkce na otevřeném intervalu I. Nechť $c \in I$ a nechť navíc $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I.

Postup

1. Určíme intervaly **spojitosti** funkce g.
2. Otestujeme, která **substituce** bude vhodná.
3. Určíme **intervaly** pro substituci. Do intervalů vstupuje
   (a) definiční obor $g(x)$,
   (b) intervaly substituce $\varphi(x)$,
   (c) intervaly funkce $f(t)$, která vznikne po substituci, mohou ovlivnit intervaly pro funkci $\varphi(x)$.
4. Provedeme **substituci**.
5. Vyřešíme **parciální zlomky**.
6. Vrátíme substituci.
7. Je-li to nutné, **slepíme**. Lepíme v bodech, kde původní funkce g je spojitá, ale substituce tam nefunguje.
   (a) Spočteme **limity** zleva a zprava pro $G(x)$.
   (b) Doladíme konstanty tak, aby výsledek byl spojitý. Aplikujeme **Lemma** o lepení.
   (c) Sepíšeme **závěr**.

   Varování: Nelze lepit v bodech, kde g není definovaná.

Příklady

Najděte primitivní funkce

1. $g(x) = \dfrac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{2 - \sin x}$
3. ❀ $g(x) = \dfrac{1}{1 + \sin x}$
4. $g(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$
5. ❀ $g(x) = \dfrac{1}{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)}$
6. $g(x) = \dfrac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$
7. $g(x) = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$
8. $g(x) = \dfrac{1}{\sin x + 2}$

- (3) v bodech $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ nelepíme
- (5) $t = \cot x$