



### 13. cvičení – Parciální zlomky 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

#### Příklady

Najděte primitivní funkce na největším možném intervalu:

$$1. f(x) = -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

**Řešení:** Integrujeme pomocí substituce  $x = \operatorname{tg} t$ .

$$\begin{aligned} \int -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &\rightarrow -\frac{3}{16} \int \cos^2 t dt \stackrel{C}{=} -\frac{3}{32} (t + \sin t \cos t) \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{3}{32} \arctan x - \frac{3}{32} \frac{x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

**Jiný postup:** Použijeme rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Tedy  $n = 1$  a

$$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(1+x^2)^1} + \frac{2-1}{2} I_1.$$

Protože  $I_1 \stackrel{C}{=} \arctan x$ , máme

$$\int -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \stackrel{C}{=} -\frac{3}{16} \left( \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x \right).$$

$x \in \mathbb{R}$

$$2. f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

**Řešení:** Výsledný zlomek máme přímo ve tvaru rozkladu na parciální zlomky, budeme tedy přímo počítat integrál. Provedeme jej převedením jmenovatele na čtverec a goniometrickou substitucí.

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx$$

Nyní použijeme substituci  $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$  a dostaneme, že

$$\begin{aligned} &= \frac{16}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \cos^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9} (t + \sin t \cos t) \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2 + (\sqrt{3})^2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x+1)^2 + (\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

**Jiný postup:** Převědeme na čtverec

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx$$

a použijeme lineární substituci  $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = y$ . Pak  $\frac{2}{\sqrt{3}} dx = dy$  a dostaneme

$$\frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{[y^2 + 1]^2} dy.$$

Použijeme rekurentní vzorec jako v předchozím příkladě:

$$\frac{16}{9} \int \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{[y^2 + 1]^2} dy \stackrel{C}{=} \frac{8}{3\sqrt{3}} \left( \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \arctan y \right)$$

Vrátíme substituci

$$\begin{aligned} \frac{8}{3\sqrt{3}} \left( \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \arctan y \right) &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{8}{3\sqrt{3}} \left( \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2(1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2)} + \frac{1}{2} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{2x+1}{1+x+x^2} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

3.  $f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

**Řešení:**

Hledejme rozklad ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem a roznásobením dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D) \\ x^2 &= Ax^3 + 2Ax^2 + 2Ax + Bx^2 + 2Bx + 2B + Cx + D \end{aligned}$$

odkud vyplývá, že  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = -2$  a  $D = -2$ . Hledaný rozklad má tvar

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx \stackrel{C}{=} \arctan(x+1)$$

a

$$- \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

odkud máme, že

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx \stackrel{C}{=} \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$4. f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$$

**Řešení:** Zlomek již máme připraven ve tvaru vhodném k integraci. Použijeme substituci  $x = \operatorname{tg} t$ . Dostaneme, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx &\rightarrow \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^3} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \cos^4 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{4} \int \left( 1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{8} \int (3 + 4 \cos 2t + \cos 4t) dt \stackrel{C}{=} \frac{3}{8} t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{32} \sin 4t \\ &= \frac{3}{8} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{16} \sin 2t (2 \cos^2 t - 1) \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{3}{8} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{16} \frac{x}{x^2 + 1} \left( \frac{2}{x^2 + 1} - 1 \right) \\ &= \frac{3}{8} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{8} \frac{x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3}{8} \arctan x + \frac{1}{8} \frac{3x^3 + 5x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$5. f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)^2}$$

**Řešení:** Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 + 3x - 2 = A(x^2 + x + 1)^2 + (Bx + C)(x^2 + x + 1)(x - 1) + (Dx + E)(x - 1)$$

Roznásobením pravé strany máme

$$x^2 + 3x - 2 = A - C - E + 2Ax - Bx - Dx + Ex + 3Ax^2 + Dx^2 + 2Ax^3 + Cx^3 + Ax^4 + Bx^4$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme, že

$$A = \frac{2}{9}, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = -\frac{4}{9}, \quad D = \frac{1}{3}, \quad E = \frac{8}{3}$$

Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2}{9} \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{9} \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{3} \frac{x + 8}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Jednotlivé zlomky budeme integrovat zvlášť. Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{9} \frac{1}{x - 1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{2}{9} \ln |x - 1| \\ -\frac{2}{9} \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx &= -\frac{1}{9} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \stackrel{C}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{9} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

a nakonec

$$\frac{1}{3} \int \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=}$$

(Druhý integrál počítáme převedením jmenovatele na kanonický tvar  $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]$  a substitucí  $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$ .)

$$\stackrel{C}{=} \frac{-1}{6} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{5}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \frac{5x+2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

$x \in (-\infty, 1)$ ,  $x \in (1, \infty)$ .

6.  $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$

**Řešení:** Jmenovatel lze rozložit na součin kvadratických trojčlenů

$$(x^4+x^2+1)^2 = (x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$$

Z toho vyplývá, že rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Kx+L}{x^2-x+1} + \frac{Mx+N}{(x^2-x+1)^2}$$

Například metodou neurčitých koeficientů dostaneme, že

$$A = B = C = D = L = N = \frac{1}{4}, \quad K = M = -\frac{1}{4}$$

Integrací jednotlivých zlomků dostaneme po úpravách

$$\int \frac{1}{4} \frac{x+1}{x^2+x+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8} \ln(x^2+x+1)$$

$$\int \frac{1}{4} \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12} \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

$$\int -\frac{1}{4} \frac{x-1}{x^2-x+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8} \ln(x^2-x+1)$$

$$\int -\frac{1}{4} \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{12} \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Sečtením a úpravami dostaneme, že

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{5}{12\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{12\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6} \frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$7. f(x) = \frac{1}{(x^3 + 1)^2}$$

**Řešení:** Platí, že

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Rozklad tedy musíme hledat ve tvaru

$$\frac{1}{(x^3 + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$1 = A(x + 1)(x^2 - x + 1)^2 + B(x^2 - x + 1)^2 + (Cx + D)(x + 1)^2(x^2 - x + 1) + (Ex + F)(x^2 - x + 1)^2$$

Roznásobením pravé strany máme

$$1 = A + B + D + F - Ax - 2Bx + Cx + Dx + 2Fx + Ex + Ax^2 + 3Bx^2 + Cx^2 + Fx^2 + 2Ex^2 + Ax^3 - 2Bx^3 + Dx^3 + Ex^3 - Ax^4 + Bx^4 + Cx^4 + Dx^4 + Ax^5 + Cx^5$$

odkud sestavíme porovnáním koeficientů soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= A + B + D + F \\ 0 &= -A - 2B + C + D + E + 2F \\ 0 &= A + 3B + C + F + 2E \\ 0 &= A - 2B + D + E \\ 0 &= -A + B + C + D \\ 0 &= A + C \end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$A = \frac{2}{9}, B = \frac{1}{9}, C = -\frac{2}{9}, D = \frac{1}{3}, E = -\frac{1}{3}, F = \frac{1}{3}$$

a hledaný rozklad tedy má tvar

$$\frac{1}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2}{9} \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{9} \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{9} \frac{2x - 3}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} \frac{x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Budeme integrovat zvlášť jednotlivé zlomky. Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{9} \frac{1}{x + 1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{2}{9} \ln|x + 1| \\ \int \frac{1}{9} \frac{1}{(x + 1)^2} dx &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{9} \frac{1}{x + 1} \\ \int \frac{1}{9} \frac{2x - 3}{x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{1}{9} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx - \int \frac{2}{9} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{4}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

a nakonec

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx - \int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{x^2-x+1} - \int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx \end{aligned}$$

Zbýlý integrál vypočteme takto:

$$\int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx = \int \frac{1}{6} \frac{16}{9} \frac{1}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]^2} dx$$

nyň aplikujeme substituci  $\operatorname{tg} t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ , přičemž máme, že  $\frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$ , a proto

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{6} \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{4}{9\sqrt{3}} \cos^4 t \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{4}{9\sqrt{3}} \cos^2 t dt \\ &\stackrel{C}{=} \frac{4}{9\sqrt{3}} \frac{t + \sin t \cos t}{2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9\sqrt{3}} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x-1)^2+3}} \\ &= \frac{2}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{18} \frac{(2x-1)}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Dáme-li jednotlivé výsledky dohromady, dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^3+1)^2} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \frac{x+1}{x^2-x+1} = \\ &= \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{x}{x^3+1} \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, 1)$ ,  $x \in (1, \infty)$ .

8.  $f(x) = \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}$ .

**Řešení:**

Proveďme substituci  $t = x^5$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx &\rightarrow \frac{1}{5} \int \frac{t}{(t^2 + 2t + 2)^2} dt = \frac{1}{10} \int \frac{2t}{(t+1)^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{10} \int \frac{2t+2-2}{((t+1)^2 + 1)^2} dt = \frac{1}{10} \int \frac{2t+2}{((t+1)^2 + 1)^2} dt - \frac{1}{5} \int \frac{1}{((t+1)^2 + 1)^2} dt = \end{aligned}$$

Na první integrál použijeme substituci  $u = (t+1)^2 + 1$ , na druhý  $t+1 = \operatorname{tg} y$  a s přihlédnutím ke vztahům

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \cos^2 y, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 y} dy$$

dostaneme

$$\frac{1}{10} \int \frac{du}{u^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{10} \frac{1}{u} \rightarrow -\frac{1}{10} \frac{1}{(t+1)^2 + 1} = -\frac{1}{10} \frac{1}{t^2 + 2t + 2} \rightarrow -\frac{1}{10} \frac{1}{x^{10} + 2x^5 + 2}$$

Druhý integrál

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5} \int \cos^2 y \, dy &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{5} \frac{y + \sin y \cos y}{2} \\ &= -\frac{1}{10} y - \frac{1}{10} \operatorname{tg} y \cos^2 y = \\ &= -\frac{1}{10} y - \frac{1}{10} \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}^2 y + 1} \\ &\rightarrow -\frac{1}{10} \arctan(t+1) - \frac{1}{10} \frac{t+1}{(t+1)^2 + 1} \\ &\rightarrow -\frac{1}{10} \arctan(x^5 + 1) - \frac{1}{10} \frac{x^5 + 1}{x^{10} + 2x^5 + 2} \end{aligned}$$

Dohromady

$$\rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{10} \frac{x^5 + 2}{x^{10} + 2x^5 + 2} - \frac{1}{10} \arctan(x^5 + 1).$$

$x \in \mathbb{R}$