# 12. cvičení – Parciální zlomky

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

   **Řešení:**
   Budeme hledat rozklad ve tvaru
   $$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$
   Přenásobením dostaneme vztah
   $$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$
   Dosaďme nyní postupně za $x = -1,\ -2,\ -3$. Obdržíme tak, že
   $$-1 = 2A \implies A = -\frac{1}{2}$$
   $$-2 = -B \implies B = 2$$
   $$-3 = 2C \implies C = -\frac{3}{2}$$
   Odtud tedy vyplývá, že
   $$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \int \frac{-1}{2}\frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx + \int \frac{-3}{2}\frac{1}{x+3}\,dx \overset{C}{=}$$
   $$\overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$$
   $x \in (-\infty,-3), (-3,-2), (-2,-1), (-1,\infty)$.

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$

   **Řešení:**
   Platí, že $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$, přičemž druhý člen již nemá reálné kořeny. Rozklad tedy hledáme ve tvaru
   $$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$
   Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah
   $$x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$
   dosazením $x=1$ dostaneme, že $A = \frac{1}{3}$. Zpětným dosazením a roznásobením dostaneme, že
   $$x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

odkud vyplývá, že $C = \frac{1}{3}$ (absolutní členy) a $B = -\frac{1}{3}$ (koeficienty u $x^2$). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{3}\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x-1|$$

$$\int \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \overset{C}{=}$$

$$\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Odtud vyplývá:

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty, 1), (1, \infty)$.

3. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

**Řešení:**

Mohli bychom provést dělení, k nalezení prvního kroku rozkladu ale vede snazší cesta

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(x^3-5x^2+6x)+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} =$$

Nyní už máme na pravé straně podíl polynomů, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, a můžeme tedy použít standardní algoritmus. Nejprve rozložíme jmenovatel na kořenové činitele a poté hledáme rozklad ve tvaru

$$= 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme rovnici

$$5x^2-6x+1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$

Postupným dosazením $x=0$, $x=2$ a $x=3$ dostaneme, že

$$1 = 6A \implies A = \frac{1}{6}$$

$$9 = -2B \implies B = -\frac{9}{2}$$

$$45 - 18 + 1 = 3C \implies C = \frac{28}{3}$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \int \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\right)dx \overset{C}{=} x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3|$$

$x \in (-\infty, 0), (0, 2), (2, 3), (3, \infty)$.

4. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}$

**Řešení:**

Platí, že

$$\frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{(x^4 + 5x^2 + 4) - 5x^2 - 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

Obecně bychom měli hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A + Bx}{x^2 + 1} + \frac{C + Dx}{x^2 + 4}$$

zde ale postačí hledat jej ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x^2 + 1} + \frac{C}{x^2 + 4}$$

Je to z toho důvodu, že ve zlomku není nikde přítomno $x$ v první mocnině. Možná bude lépe vidět, proč to funguje, pokud namísto $x^2$ budeme psát $t$.

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{C}{t + 4}$$

Poznamenejme, že jde o substituci do výrazu za účelem hledání rozkladu, nikoliv substituci do integrálu. Substituce nám bude užitečná i v tom, že za $t$ lze dosazovat záporná čísla, což zjednoduší postup získávání koeficientů $A, B$. Každopádně, přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$5t + 4 = A(t + 4) + C(t + 1)$$

Dosazením $t = -4$ a $t = -1$ dostaneme, že[1]

$$-16 = -3C \implies C = \frac{16}{3}$$

$$-1 = 3A \implies A = -\frac{1}{3}$$

Odtud tedy máme, že

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{t + 1} + \frac{16}{3}\frac{1}{t + 4}$$

a tedy

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{16}{3}\frac{1}{x^2 + 4}$$

Nyní už můžeme provést integraci.

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = \int \left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{(x/2)^2 + 1}\right) dx \overset{C}{=}$$

[1]) Poznamenejme, že zde hledáme rozklad platný pro **všechna** $t$ reálná. Pokud by někdo namítl, že $t = x^2$ a není tedy možné dosazovat záporná čísla, pak na tuto námitku odpovězme, že pokud najdeme obecnější rovnost platnou pro **všechna** reálná čísla, pak jistě platí i pro všechna nezáporná reálná čísla — která již lze psát ve tvaru druhé mocniny $x$.

$$\overset{C}{=} x + \frac{1}{3}\arctan x - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1/2}\arctan\frac{x}{2} = x + \frac{1}{3}\arctan x - \frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}$$

$x \in \mathbb{R}$

5. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$

**Řešení:**
Rozklad budeme hledat ve tvaru

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2+1 = A(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)^2$$

Dosazením $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme, že

$$2 = 4C \implies C = \frac{1}{2}$$

$$2 = -2A \implies A = -1$$

Nyní dosazením např. $x = 0$ dostaneme, že

$$1 = -A - B + C \implies B = -A + C - 1 = -(-1) + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Odtud máme:

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$$

$x \in (-\infty,-1), (-1,1), (1,\infty)$.

6. $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

**Řešení:** Kvadratický trojčlen $x^2 + x + 1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ nemá reálné kořeny. Proto rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme, že $A = 1$. Dosazením $x = -1$ dostaneme, že $B = -1$. Po dosazení a roznásobení dostaneme

$$1 = (1+x)(1+x+x^2) - x(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

$$1 = 1 + x + x^2 + Cx^3 + Cx^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x$$

odkud vyplývá, že $D = -1$ a $C = 0$. Rozklad má tvar

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

Integrací dostáváme

$$\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|1+x| - \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty,-1),(-1,0),(0,\infty)$.

7. $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2-3x+2}\right)^2$

**Řešení:**

Nejprve najdeme rozklad jmenovatele. Platí, že

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Hledáme tedy rozklad výrazu

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

Ten je potřeba obecně hledat ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)^2 + D(x-2)(x-1)^2$$

Dosazením $x = 1$ a $x = 2$ dostaneme, že

$$1 = A, \qquad 4 = C$$

Zbylé koeficienty $B, D$ určíme dosazením dvou libovolných hodnot, třeba $x = 0$ a $x = 3$. Dostaneme, že

$$0 = 4A - 4B + C - 2D = 4 - 4B + 4 - 2D \implies -8 = -4B - 2D$$

$$9 = A + 2B + 4C + 4D = 1 + 2B + 16 + 4D \implies -8 = 2B + 4D$$

Odtud snadno vyplývá, že $D = -4$ a $B = 4$. Odtud vyplývá:

$$\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}\right)\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{1}{x-1} + 4\ln|x-1| - \frac{4}{x-2} - 4\ln|x-2| = -\frac{x-2+4(x-1)}{(x-1)(x-2)} + 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| =$$

$$-\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$$

$x \in (-\infty,1),(1,2),(2,\infty)$.

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

**Řešení:**

Platí, že $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})$. Druhý kvadratický trojčlen tedy nemá reálné kořeny, rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

dosazením $x=-1$ dostaneme, že $A=\frac{1}{3}$. Roznásobením pak dostaneme

$$1 = \frac{1}{3}(x^2-x+1) + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

odkud ihned vyplývá, že $C = \frac{2}{3}$ (porovnání koeficientů absolutních členů) a $B = -\frac{1}{3}$ (porovnání koeficientů u druhé mocniny $x$). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x+1|$$

$$\int \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Odkud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty,-1), (-1,\infty)$.