10. cvičení – Per partes + substituce 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. (a) $\displaystyle\int \arctan x \,\mathrm{d}x$

Řešení:
Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int 1 \cdot \arctan x \, dx = [x \arctan x] - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

Substituce $y = 1 + x^2$.

$$-\int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \to -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y} \, dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2} \ln |y| \to -\int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Tedy dohromady

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \, dx \to \int \frac{dy}{1 - y^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right|$$

$$\to \int f(x) \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|$$

Funkce $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$ je definována na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.
Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (-1, 1)$.
Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \to \int \frac{dy}{y} \overset{C}{=} \ln |y| \to \int f(x) \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \ln |\sin x|$$

Funkce $\cot x$ je definována na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ (nebo $[-1, 0)$).
Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$ (nebo $(-\infty, 0)$). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $\displaystyle\int x \ln \frac{1+x}{1-x} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $v' = \frac{2}{1-x^2}$.

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x^2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x - \cos x$. Potom $dy = \cos x + \sin x$ a platí

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \, dx \to \int \frac{dy}{y^{1/3}} \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} y^{2/3}$$

$$\to \int f(x) \, \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x}$$

Funkce $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$ je definována na $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.
Pro substituci máme $\varphi = \sin x - \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $(\sin - \cos)((\alpha, \beta)) = (0, \sqrt{2})$ pro sudá k a Platí $(\sin - \cos)((\alpha, \beta)) = (-\sqrt{2}, 0)$ pro lichá k.
Funkce $f = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ má primitivní funkci na intervalech $(a, b) = (0, \infty)$ (ten vezmeme pro sudá k) nebo na $(a, b) = (-\infty, 0)$ (ten pro lichá k). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(Není potřeba najít přesně interval $(0, \sqrt{2})$, důležité je jen ověřit vztah $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$.)

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} \to 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy \stackrel{C}{=} 2 \arcsin y$$

$$\to \int f(x) \, \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} 2 \arcsin \sqrt{x}$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalu $(0, 1)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Položme $\varphi = \sqrt{x}$ a $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Pak $\sqrt{}((0, 1)) = (0, 1)$.
Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ má primitivní funkci na intervalu $(-1, 1)$. Protože $\sqrt{}((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0, 1)$.

(g) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x} \,\mathrm{d}x$

Řešení:
První per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 e^{-2x} \, dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x}\right] + \int x e^{-2x} \, dx =$$

Druhé per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2}x e^{-2x}\right] + \frac{1}{2}\int e^{-2x} \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}\int e^{-2x}$$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak platí

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} \, dx = \int \frac{\cos^2 x \, \cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\sin x} \cos x \, dx$$

$$\to \int \frac{1 - y^2}{y} \, dy = \int \frac{1}{y} \, dy - \int y \, dy \stackrel{C}{=} \ln|y| - \frac{y^2}{2} \to \int f(x) \,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2}$$

Funkce $\frac{\cos^3}{\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}$ je definována na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.
Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ (nebo $[-1, 0)$).
Funkce $f = \frac{1-y^2}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$ (nebo $-\infty, 0)$). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x^2+1}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$ a $y^2 - 1 = x^2$ a platí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \, dx = \int \frac{1}{x^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx \to \int \frac{1}{y^2 - 1} \, dy = -\int \frac{1}{1 - y^2} \, dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$$

$$\to \int f(x) \,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{1 - \sqrt{x^2+1}}$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(0, \infty)$ a $(-\infty, 0)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{x\sqrt{(1+x^2)}}$.

Položme $\varphi = \sqrt{x^2+1}$ a $(\alpha,\beta) = (0,\infty)$ (nebo $(-\infty,0)$). Pak $\varphi((\alpha,\beta)) = (1,\infty)$ (v obou případech).

Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(1,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0,\infty)$ i pro $x \in (-\infty,0)$.

(j) $\displaystyle\int x \arctan x \, \mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x$$

(k) $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\int 1\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = \left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right] - \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \stackrel{C}{=}$$

$$x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$$

Poslední integrál lze počítat např. substitucí $y = 1+x^2$.

(l) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \sin(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1\cdot\sin(\ln x) = x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \cos(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1\cdot\sin(\ln x) = x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int\sin(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2\int 1\cdot\sin(\ln x) \stackrel{C}{=} x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

$$\int\sin(\ln x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

(m) $\displaystyle\int x^n\ln x\,\mathrm{d}x$, $n \neq -1$

Řešení:

Položme $u' = x^n$, $v = \ln x$. Potom $u = x^{n+1}/n+1$ a $v' = \frac{1}{x}$. Integrace per partes dává

$$\int x^n\ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int\frac{x^n}{n+1}\,dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

(n) $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x$

Řešení:

Pro $b = 0$ je $\int e^{ax} \sin(0x)\ \mathrm{d}x = \int 0\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} 1$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx$$

$$\int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.