7. cvičení – Řady pomocí Taylora

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci řad.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}$

   Řešení:
   Položme $a_n = \sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
   Položme funkci $f(x) = \sin x - \arcsin x$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.
   Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\\
&= -\frac{1}{3}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

   Nejsilnější člen je tedy x^3.
   Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
   Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n^3}}$$

   Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

   Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

   Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{3}.$$

   Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{3}.$$

   Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}$

Řešení:

Položme $a_n = 2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n^{1/5}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = 2(\tan x - \sin x) - x^3$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad x \to 0\\
f(x) &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\right) - x^3\\
&= \frac{1}{4}x^5 + o(x^6), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^5.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)^5 = \frac{1}{n}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}\right|}{\frac{1}{n}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}}{\frac{1}{n}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n^{1/5}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{4}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní, tak je divergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$

Řešení:

Položme $a_n = \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = \sin(x - \arcsin x)$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
x - \arcsin x &= -\frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
f(x) &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^3.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^3}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\beta}\right)$, $\beta > 0$

Řešení:

Položme $a_n = \ln\frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\beta}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n^\beta}$. . Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = \ln x - \ln(\sin x) = \ln\frac{x}{\sin x} = -\ln\frac{\sin x}{x}$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\ \frac{1}{x}\sin x &= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3), \quad x \to 0\\ f(x) &= \frac{1}{6}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^2.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n^\beta}\right)^2 = \frac{1}{n^{2\beta}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\ln\frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\beta}\right)\right|}{\frac{1}{n^{2\beta}}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\beta}\right)}{\frac{1}{n^{2\beta}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n^\beta}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{6}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\beta}\right)}{\frac{1}{n^{2\beta}}} = \frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^\infty b_n$. Protože $\sum_{n=1}^\infty b_n$ je konvergentní právě tehdy, když $\beta > \frac{1}{2}$, tak i $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ je konvergentní právě tehdy, když $\beta > \frac{1}{2}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Řešení:
Položme $a_n = \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha}$, dále položme $c_n = \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = \sin x - x$. Pak platí $f(x_n) = c_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\ f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x\\ &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^3.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{3+\alpha}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha}\right|}{\frac{1}{n^{3+\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^3}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > -2$, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ právě pro $\alpha > -2$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

Řešení: Položme $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)$.
Dále položme $c_n\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1$. Uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = \sqrt{1+2x} - 2\sqrt{1+x} + 1$. Pak platí $f(x_n) = c_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2), \quad x \to 0$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0$$
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Nejsilnější člen je tedy x^2.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^{3/2}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)\right|}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}{\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{4}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{4}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p$, $p \in \mathbb{R}$

Řešení:
Položme $a_n = \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ a $c_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = e\left(1 - e^{\frac{1}{x}\log(1+x) - 1}\right)$. Pak platí $f(x_n) = c_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0\\
\frac{1}{x}\log(1+x) &= 1 - \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0\\
e^{\frac{1}{x}\log(1+x)-1} &= 1 - \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0\\
f(x) &= e\frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^p$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p\right|}{\frac{1}{n^p}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}{\frac{1}{n}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{ex}{2}}{x} = -\frac{e}{2}.$$

Dále z VOLSF

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|^p}{x} = \frac{e^p}{2^p}.$$

Tedy platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{e^p}{2^p}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Navíc $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní právě tehdy, když $p > 1$. Tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní právě tehdy, když $p > 1$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Řešení:
Položme $a_n = \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = (e^{x^2} - 1 - x^2)(\arcsin x^2 - x)$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 - x^2\right)\left(x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6) - x\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^5.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^5 = \frac{1}{n^{5/2}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|}{\frac{1}{n^5}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{5/2}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{2}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{5/2}}} = -\frac{1}{2}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{2}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

Řešení:

Položme $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$ Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = \sin x^3 - \log(1 + x^2)$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^3 + o(x^3)\right) - \left(x^2 + o(x^2)\right) \\ &= -x^2 + o(x^2), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^2.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right|}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n=\frac{1}{\sqrt[6]{n}}$, $x_n\to 0$, $x_n\neq 0$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^2)}{x^2}=-1.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=-1.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=1.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ je divergentní, tak je divergentní i $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Řešení:

Položme $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Zřejmě $x_n\to 0$.
Položme funkci $f(x)=x+\log(\sqrt{1+x^2}-x)$ Pak platí $f(x_n)=a_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}-x+\sqrt{1+x^2}&=-x+1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),\quad x\to 0\\ x+\log(-x+\sqrt{1+x^2})&=x+(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4))-\frac{1}{2}(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4))^2\\ &\quad+\frac{1}{3}(-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4))+o((-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4))^3)\\ &=\frac{1}{6}x^3+o(x^3),\quad x\to 0.\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^3.

Použijeme tedy LSK s $b_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3=\frac{1}{n^{3/2}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}+\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|}{\frac{1}{n^{3/2}}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_n\to 0$, $x_n\neq 0$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.