6. cvičení – Řady - Leibniz + všehochuť

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$

   Řešení: Otestujeme limitu

   $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-\lim_{n\to\infty}1=1-1=0.$$

   Je vidět, že posloupnost je nerostoucí, tedy z Leibnize řada konverguje,

   (b)
   $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln k}$$

   Řešení: Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\ln k}\xrightarrow{k\to\infty}0$. Posloupnost $\frac{1}{\ln k}$ je zjevně nerostoucí.

   (c)
   $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$$

   Řešení: Máme
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}=\frac{2}{3},$$
   tedy $\lim_{n\to\infty}a_n$ neexistuje. Tedy řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence a tudíž diverguje.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$

   Řešení: Označme $b_n=\frac{n}{n^2+2}$. Zjevně je $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2}=0$. Abychom ukázali monotónnost, uvažujme funkci $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$. Její derivace je:

   $$f'(x)=\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}.$$

   Tedy platí, že $f'(x)<0$ pro $x>\sqrt{2}$. Odtud máme, že posloupnost b_n je klesající pro $n\geq 2$.
   Řada pak konverguje z Leibnizova kritéria.

2. Rozhodněte o **neabsolutní i absolutní konvergenci** následujících řad ($x\in\mathbb{R}$).

   (a) ♡ $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

   Řešení: Řada konverguje absolutně podle odmocninového kritéria, neboť

   $$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+10}{3k+1}=\frac{2}{3}<1.$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

Řešení: Pro $|z| < 1$ konverguje absolutně podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim \frac{\frac{|(-1)^{n+2}|\,|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|(-1)^{n+1}|\,|z|^n}{n}} = \lim \frac{|z|}{1}\frac{n}{n+1} = |z| < 1.$$

Pro $|z| > 1$ diverguje, neboť limita koeficientů buď neexistuje nebo není nulová, tedy nesplňuje nutnou podmínku.
Pro $z = 1$ řada konverguje podle Leibnizova kritéria (neabsolutně), neboť posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je monotónní a konverguje k nule.
Pro $z = -1$ řada diverguje, neboť $\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -1/n$ a řada $\sum -\frac{1}{n}$ je $(-1)\cdot$harmonická.

(c) ♡ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$

Řešení: Vyšetříme absolutní konvergenci srovnáním s řadou $b_k = \frac{1}{k^2}$. Máme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}\right|}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^4}{k^4} \cdot \frac{2+\frac{3}{k}+\frac{4}{k^2}}{2+\frac{3}{k^4}} \overset{AL}{=} 1 \in (0,\infty).$$

Protože $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje, tak z LSK konverguje i $\sum |a_k|$. Tedy řada je absolutně konvergentní a tedy i konvergentní.
Jiné řešení přes SK:
Platí, že (pro $k \geq 4$)

$$\left|(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}\right| = \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3} = \frac{1}{k^2}\frac{2+3/k+4/k^2}{2+3/k^4} \leq \frac{1}{k^2}\frac{2+1+1}{2} = \frac{2}{k^2}.$$

Tento odhad dává absolutní konvergenci naší řady pomocí srovnávacího kritéria.

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+9}-\sqrt{k}\right)$$

Řešení: Platí, že k^2 je liché, právě když k je liché. Proto

$$\cos(k^2\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Dále je

$$\sqrt{k+9}-\sqrt{k} = \frac{9}{\sqrt{k+9}+\sqrt{k}} \geq \frac{9}{2\sqrt{k+9}}.$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že řada absolutně konvergovat nemůže (řada $\sum \frac{9}{2\sqrt{k+9}}$ není konvergentní), ale konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria. Monotonii lze odvodit z tvaru

$$\frac{9}{\sqrt{k+9}+\sqrt{k}}$$

(e)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$$

Řešení:
Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2k+1}$. Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně. Leibnizovo kritérium:

$$\frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2k+(-1)^k} \leq \frac{1}{2k-1},$$

tedy ze 2 policajtů je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+(-1)^k} = 0.$$

Monotonie:

$$2k+1 \leq 2(k+1)-1, \quad 2k-1 \leq 2(k+1)+1 \implies \frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2(k+1)+(-1)^{k+1}}$$

3. Vyšetřete konvergenci řad. (Všechna $x, p, q, \alpha \in \mathbb{R}$.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \operatorname{arccot}^2 \sqrt{n}}$

Řešení: Otestujeme nutnou podmínku. Z Heineho věty $x_n = \sqrt{n}$, $\sqrt{n} \to \infty$ stačí spočítat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2 \operatorname{arccot}^2 x} = 1,$$

tedy řada diverguje.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{n^2}{2^n}$

Řešení: Řada má nezáporné členy. Použijeme LSK s $b_n = \frac{n^2}{2^n}$. Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan \frac{n^2}{2^n}}{\frac{n^2}{2^n}} = 1.$$

(Heine s $x_n = n^2/2^n$ a $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.)
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ale $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje např. z d'Alembertova kritéria.
Závěr: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) ♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) \ln(n^2+n)}{n^2}$

Řešení:
Nejprve upravíme odmocniny a logaritmus:

$$(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$\ln\left(n^2+n\right) = \ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(n^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Protože řada má nezáporné členy, můžeme použít LSK s

$$b_n = \frac{\ln n}{n^2\sqrt{n}}$$

Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\left(2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{n^2}}{\frac{\ln n}{n^2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\left(2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n}$$

$$\stackrel{VOAL}{=} \frac{2}{1+1} \cdot (2+0) = 2.$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (známá řada), tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \ln \frac{n^2-1}{n^2+1}$

Řešení:

Přepíšeme na

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Pro absolutní konvergenci máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} -\ln \frac{n^2-1}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2-1}$$

Můžeme použít LSK s

$$b_n = \frac{n^2+1}{n^2-1} - 1 = \frac{2}{n^2-1}$$

Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{n^2+1}{n^2-1}}{\frac{2}{n^2-1}} = 1$$

(Heine s $x_n = 2/(n^2-1)$ a $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.)
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Ale $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, ze srovnání s $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, tedy i konverguje.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \arcsin \frac{1}{2n}\right)^n$

Řešení: Aplikujeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \lim_{n\to\infty} n \arcsin \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

(Heine s $x_n = 1/2n$ a $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.)
Tedy řada konverguje.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{\sqrt{n}\ln n}$

Řešení:

i. Jestliže $x = 0$, řada konverguje.

ii. Pro $x > 0$ má řada od jistého n_0 nezáporné členy. Srovnáme LSK s $b_n = \frac{x}{\sqrt{n}\ln n}$. Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{n}\ln n}}{\frac{x}{\sqrt{n}\ln n}} = 1$$

(Heine s $x_n = x/\sqrt{n}\ln n$ a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.)
Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje (známá řada), tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

iii. Pro $x < 0$ uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$.

Závěr: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $x = 0$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{x}{\sqrt{n}\ln n}$

Řešení: Analogicky k předchozímu příkladu. Pro $x = 0$ řada konverguje. Pro $x \neq 0$ uvažujme LSK s $b_n = \frac{x^2}{n\ln^2 n}$. Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (známá řada), tak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Závěr: řada knoverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(h) ♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\ln \frac{n+3}{n+1} \right)^n$

Řešení: Řada má nezáporné členy. Z odmocninového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}} \ln \frac{n+3}{n+1} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot 0 < 1.$$

(První člen plyne ze dvou policajtů, druhý z Heineho.)
Závěr: řada konverguje.
Následující 3 příklady máme od `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html`

(i) ♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!+2}$

Řešení:
Protože řada má nezáporné členy, můžeme použít LSK s

$$b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n!+1}{(n+2)!+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 n!}{n^2 n!} \cdot \frac{1+\frac{1}{n!}}{\frac{(n+2)(n+1)}{n^2} + \frac{2}{n^2 n!}} \overset{VOAL}{=} \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(j) ♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}}$

Řešení:
Prve upravíme a_n.

$$a_n = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{20}{(n-2)(n-3)}$$

Aplikujeme LSK s $b_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{20}{(n-2)(n-3)}}{\frac{1}{n^2}} = 20.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right)$

Řešení: Řadu roztrheneme. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergují jako geometrické.
Poslední řadu upravíme

$$c_n := \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} = \frac{1}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})\sqrt[4]{n}}$$

Aplikujeme LSK s $b_n = \frac{1}{n^{3/4}}$. Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})\sqrt[4]{n}}}{\frac{1}{n^{3/4}}} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, diverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.
Závěr: Původní řada je součtem konvergentní a divergentní řady, dohromady je tedy divergentní.

(l) $\heartsuit$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$

Řešení:
Otestujeme nutnou podmínku konvergence. Pro $x = 0$ je $a_n = 1$. Pro $x \neq 0$ užijeme Heineho $x_n = y$, $x_n \to \infty$

$$\lim_{y\to\infty} e^{y\ln\left(\cos\frac{x}{y}\right)}$$

Dále

$$\lim_{y\to\infty} y \ln\left(\cos\frac{x}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln\left(\cos\frac{x}{y}\right)}{\left(\cos\frac{x}{y}\right)-1} \cdot \frac{\left(\left(\cos\frac{x}{y}\right)-1\right)}{\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{yx^2}{y^2} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 = 0.$$

V původní limitě:

$$\lim_{y\to\infty} e^{y\ln\left(\cos\frac{x}{y}\right)} = e^0 = 1.$$

Tedy řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, tedy diverguje.

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}$

Řešení:

i. Nechť $q < 2$ a $p \geq 0$. Pak uvažujme LSK s $b_n = \frac{n^p}{n^2}$. Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}}{\frac{n^p}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^p}}{n^{q-2}+1-\frac{3}{n^2}} = \begin{cases} 1, & p > 0 \\ 2, & p = 0. \end{cases}$$

Pak z LSK naše řada konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum n^{p-2}$, tedy pro $p-2 < -1$, tedy $p < 1$.

ii. Nechť $q < 2$ a $p < 0$. Pak uvažujme LSK s $b_n = \frac{1}{n^2}$. Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^p}{n^{q-2}+1-\frac{3}{n^2}} = 1$$

Protože $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje, konverguje z LSK i naše řada.

iii. Nechť $q \geq 2$ a $p \geq 0$. Pak uvažujme LSK s $b_n = \frac{n^p}{n^q}$. Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}}{\frac{n^p}{n^q}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^p}}{1+n^{2-q}-\frac{3}{n^q}} = \begin{cases} 1, & (q > 2, p > 0) \vee (q = 2, p = 0) \\ 2, & q > 2, p = 0. \\ \frac{1}{2}, & q = 2, p > 0. \end{cases}$$

Pak z LSK naše řada konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum n^{p-q}$, tedy pro $p-q < -1$.

iv. Nechť $q \geq 2$ a $p < 0$. Pak uvažujme LSK s $b_n = \frac{1}{n^q}$. Máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^p}{n^{q-2}+1-\frac{3}{n^2}} = 1$$

Pak z LSK naše řada konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum n^{-q}$, tedy pro $q > 1$.

Závěr: Řada konverguje právě tehdy, když

$$(q < 2, p < 1) \vee (q \geq 2, p < 0) \vee (q \geq 2, p \geq 0, p-1 < -1)$$

(n)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$$

Řešení:

Pokud $x = 0$, řada konverguje absolutně (je triviální). Odhad (zapomenutí členu x^{2k} ve jmenovateli)

$$\left| \frac{x^k}{1+x^{2k}} \right| \leq |x|^k$$

dává, že pro $|x| < 1$ řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.

Pokud $x = \pm 1$, řada konvergovat nemůže, neboť $a_k = \frac{(\pm 1)^k}{1+(\pm 1)^{2k}} = \frac{(\pm 1)^k}{2} \not\to 0$.
Nechť nyní $|x| > 1$. Potom odhad (zapomenutí jedničky ve jmenovateli)

$$\left|\frac{x^k}{1+x^{2k}}\right| \leq \left|\frac{x^k}{x^{2k}}\right| = \frac{1}{|x|^k}$$

dává, že řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.
Závěr: Pro $x \neq \pm 1$ konverguje absolutně, pro $x = \pm 1$ nekonverguje.

(o) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

Řešení:
Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle odhadu

$$\left|(-1)^k \frac{x^k}{k}\right| \leq |x|^k.$$

Pro $x = 1$ konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria, protože $\frac{1}{k} \searrow 0$. Absolutně nekonverguje, neboť řada $\frac{1}{k}$ není konvergentní.
Pro $x = -1$ řada nekonverguje, neboť $(-1)^{k+1}\frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\frac{1}{k}$.
Pokud $|x| > 1$, řada nekonverguje, neboť $\lim |a_k| = +\infty$.

(p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Řešení:
Pro $|x| < 1$ je řada konvergentní absolutně podle srovnávacího kritéria a odhadu

$$\left|(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq |x|^{2k+1}.$$

Pro $x = 1$ je řada konvergentní neabsolutně podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{2k+1} \searrow 0$.
Pro $x = -1$ je $(-1)^k(-1)^{2k+1}\frac{1}{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ a řada konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.
Pro $|x| > 1$ řada nekonverguje, neboť $\lim |a_k| = +\infty$.

(q) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$

Řešení: Použijeme d'Alambertovo kritérim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^\alpha}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot (n+1)^{\alpha-2},$$

což pro $\alpha = 2$ vyjde $1/4$, pro $\alpha < 2$ je to 0 a pro $\alpha > 2$ vyjde ∞. Tedy řada konverguje absolutně pro $\alpha \leq 2$ a diverguje pro $\alpha > 2$.

Bonus

4. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní (K), $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní (D). (Řady mohou mít i nezáporné členy). Rozhodněte, zda musí platit:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ K Nepravda.
   Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ je konvergentní. Pak z linearity máme i konvergenci řady
   $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + c_n) - a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$
   což je spor.
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ D Nepravda, např. $c_n = n$, $d_n = -n$.
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ K Pravda, plyne z věty o linearitě.
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, $k, l \in \mathbb{R}$, K Pravda, plyne z věty o linearitě.
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ K Nepravda, např. $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ K Nepravda, např. $c_n = d_n = n$.
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ K Nepravda, např. $b_n = \frac{1}{n^2}$, $d_n = n^3$.
5. Dokažte, nebo najděte protipříklad.
   (a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$.
   Řešení: Nechť $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (částečný součet první řady) a $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} + a_{2k})$ (částečný součet druhé řady). Potom platí, že $\sigma_n = s_{2n}$, a tedy posloupnost částečných součtů druhé řady tvoří podposloupnost částečných součtů řady první. A protože libovolná podposloupnost konvergentní posloupnosti konverguje (a to ke stejné limitě), je tvrzení pravdivé.
   (b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
   Řešení: Tvrzení není pravdivé. Uvažte posloupnost $a_n = (-1)^n$. Potom první řada $\sum a_n$ má vlastně podobu $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ a osciluje, kdežto druhá $\sum(a_{2n-1} + a_{2n})$ má podobu $0 + 0 + 0 + 0 + \dots$ a je zjevně konvergentní.
   (c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.
   Řešení: Tvrzení není pravdivé. Řada $\sum \frac{1}{n}$ není konvergentní.
   (d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.
   (e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.
   Řešení: Tvrzení jsou zjevně nepravdivá, co třeba řady se zápornými členy $\sum -\frac{1}{n^2}$. Ale i pokud předpokládáme, že $a_n \geq 0$ pro každé přirozené n, přesto najdeme protipříklad. Uvažte posloupnost
   $$a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}, \qquad a_{2n+1} = \frac{2}{(2n)^2}.$$
   Potom je celkem zřejmé, že $a_{2n+1} \geq a_{2n}$. Přitom řada $\sum a_n$ je konvergentní, neboť $a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq \frac{1}{n^2}$ a řada tedy konverguje podle srovnávacího kritéria.