6. cvičení – Řady - Leibniz + všehochuť

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Leibniz)**.** Nechť $\{b_n\}$ je **monotónní** posloupnost, která konverguje k 0. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konverguje.

Hinty

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

Poznámka 2. Algoritmus:

1. Splňuje řada **nutnou podmínku**?
2. Mohla by být **absolutně konvergentní**? Pokud ano, testujeme $\sum |a_n|$ kritérii pro nezáporné řady. Pokud řada konverguje absolutně, tak konverguje.
3. Neabsolutní konvergence - **Leibniz**.
   (a) Např. situace $(-1)^n b_n$, $\cos(n\pi)b_n$, kde b_n jde k 0 monotónně.
   (b) **Monotonii** je nutné důkladně prověřit.
      i. Jak vypadá $b_{n+1} - b_n$ nebo b_{n+1}/b_n?
      ii. Převedeme b_n na funkci a zderivujeme - zjistíme, kde roste a klesá.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln k}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$

2. Rozhodněte o **neabsolutní i absolutní konvergenci** následujících řad ($x \in \mathbb{R}$).

   (a) ♡ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

   (c) ❄ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$

   (d) ✿ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+9}-\sqrt{k}\right)$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$

3. Vyšetřete konvergenci řad. (Všechna $x, p, q, \alpha \in \mathbb{R}$.)

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\operatorname{arccot}^2\sqrt{n}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{n^2}{2^n}$

   (c) ✻ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\ln(n^2+n)}{n^2}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\ln\frac{n^2-1}{n^2+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \arcsin \frac{1}{2n} \right)^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{\sqrt{n} \ln n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{x}{\sqrt{n} \ln n}$

(h) ❀ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\ln \frac{n+3}{n+1} \right)^n$

(i) ❄ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n+2)! + 2}$

(j) ✻ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + 2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right)$

(l) ✫ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{x}{n} \right)^n$

(m) ❁ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + 1}{n^q + n^2 - 3}$

(n) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 + x^{2k}}$

(o) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

(p) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

(q) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$

Bonus

4. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní (K), $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní (D). (Řady mohou mít i nezáporné členy). Rozhodněte, zda musí platit:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ K

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ D

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ K

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, $k, l \in \mathbb{R}$, K

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ K

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ K

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ K

5. Dokažte, nebo najděte protipříklad.

   (a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$.

   (b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.

   (d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge 1$.

   (e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge n_0$.

(2a) Cauchy
(2c) LSK
(2d) $\cos(k\pi) = (-1)^k$
(3c) LSK $\frac{2 \ln n}{n^2 \sqrt{n}}$
(3h) Cauchy
(3i) LSK $1/n^2$
(3j) LSK $1/n^2$
(3l) NP
(3m) uvažujte případy, kdy $p \gtrless 0$ a $q \gtrless 2$.