5. cvičení – Řady - Limitní srovnávací kritérium

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

   Řešení: Použijeme limitní srovnávací kritérium. Položme $b_n = \frac{1}{n}$. Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Tedy počítáme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1.$$

   Jelikož $1 \in (0, \infty)$, tak naše řada konverguje právě tehdy, když konverguje zvolená b_n. Ta diverguje, čili i zadaná řada diverguje.

   (b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$$

   Řešení: Použijeme limitní srovnávací kritérium a srovnání s řadou $\sum \frac{1}{n}$. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

   řada diverguje.

   (c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$$

   Řešení: Nejprve výraz upravíme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5-n^2-1}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{(n^2+5)(n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{4/3}}.$$

   Jelikož jsme řadu omezili konvergující řadou, tak zadaná řada taktéž konverguje ze srovnávacího kritéria.

   (d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}$$

   Řešení: Rozšířením (jako výše) dostaneme

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}} = \frac{4}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+5} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}\right)}$$

Jmenovatel se tedy chová zhruba jako $n^{1/4} \cdot n^{4/3} = n^{19/12}$. Přesněji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[3]{(n^2+5)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\,\sqrt[3]{n^2+5}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}\right)}}{\frac{1}{n^{1/4}\cdot n^{4/3}}} = 4 \in (0,\infty)$$

a podle limitního srovnávacího kritéria (srovnávali jsme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^{19/12}}$) řada konverguje.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+1/n)^n}$$

Řešení: Řada konverguje, neboť $\frac{1}{(2+1/n)^n} \leq \frac{1}{2^n}$ a geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konverguje.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$$

Řešení: Řada konverguje podle srovnávacího kritéria, neboť

$$\frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3} = \frac{n\sqrt{n}}{n^3} \cdot \frac{1+2n^{-1/2}}{2+1/n} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1+2}{2+0} = \frac{3}{2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

Řešení: Řadu odhadneme zdola pro $n \geq 3$:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \geq \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, tedy i zadaná řada diverguje.

(h)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\ln k}$$

Řešení: Použijeme srovnávací kritérium. Pro $k > e^2$ je $k^{-\ln k} = \frac{1}{k^{\ln k}} < \frac{1}{k^2}$. Řada konverguje, neboť konverguje řada $\sum \frac{1}{k^2}$.

2. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

Řešení:

Snadno se ověří, že všechny koeficienty $a_n = n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ jsou nezáporné. Ukážeme, že $a_n \not\to 0$ pro $n \to \infty$. Je totiž

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty,$$

kde pro výpočet limity posledního zlomku použijeme Heineho větu, substituci $x = \frac{1}{n}$ a limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Řada tedy nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Řešení: LSK s $b_n = \frac{1}{n^2}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
Heine: $x_n = 1/n^2$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$$

Řešení: **Řešení:** LSK s $b_n = \frac{1}{n}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\arctan n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje , tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$$

Řešení:
Položme $a_n = \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$. Ukážeme, že a_n lze porovnat s $\frac{1}{n^2}$ a tudíž řada podle limitní verze srovnávacího kritéria konverguje. Podle Heineho věty a substituce $x = \frac{1}{n}$ totiž máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

takže použitím obou limit dohromady dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

(e)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1\right)$$

Řešení:

Protože

$$\left(k^{(k^2+1)^{-1}}-1\right)=e^{\frac{\ln k}{k^2+1}}-1$$

a výraz v exponentu konverguje pro $k\to\infty$ k nule (například podle Heineho věty a l'Hospitalova pravidla), dostáváme s přihlédnutím k Heineho větě, větě o limitě složené funkce a základní limity $\frac{e^x-1}{x}\to 1$ pro $x\to 0$, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln k}{k^2+1}}-1}{\frac{\ln k}{k^2+1}}=1.$$

Podle limitní verze srovnávacího kritéria tedy vyšetřovaná řada konverguje, právě když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2+1}.$$

Ukážeme, že tato řada konverguje srovnáním s $(\ln k)/k^2$.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\ln k}{k^2+1}}{\frac{\ln k}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{k^2+1}=1.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}$ konverguje, tedy konverguje i původní řada z limitního srovnávacího kritéria.

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k}$$

Řešení:
Řada diverguje srovnáním s řadou $\sum_k\frac{1}{k}$, neboť limitní srovnávací kritérium dává

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{k^2+1}\cos\frac{1}{k}=1.$$

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}}$$

Řešení: Nejprve upravíme odmocniny.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

Dále

$$\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2)^2}}$$

LSK s $b_n=\frac{n^{-3/2}}{\frac{1}{n^{4/3}}}=n^{-1/6}$

. Pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n^{1/6}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2)^2}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\cdot\frac{n^{3/2}}{n^{4/3}}$$

$$\overset{VOAL}{=}1\cdot\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
Mnohokrát použit Heine a VOLSF.

(h)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\frac{2k}{1+k^2},$$

Řešení: Vizte další příklad.

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\frac{2kx}{x^2+k^2},$$

kde $x\in\mathbb{R}$ je parametr.
Řešení:
Pokud $x=0$, řada má nulové koeficienty a konverguje. Pokud $x\neq 0$, použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{y\to 0}\frac{\arctan y}{y}=1,$$

odkud vyplývá (substitucí $y=\frac{2kx}{x^2+k^2}$), že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\arctan\frac{2kx}{x^2+k^2}}{\frac{2kx}{x^2+k^2}}=1,$$

a proto řada $\sum_k \arctan\frac{2kx}{k^2+x^2}$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_k \frac{2kx}{x^2+k^2}$. Jednoduchým srovnáním ale dostaneme, že od určitého členu počínaje, kdy je $k^2\geq x^2$, platí

$$\frac{2kx}{x^2+k^2}\geq\frac{2kx}{2k^2}=\frac{x}{k},$$

přičemž $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{k}$ diverguje pro každé $x\neq 0$.
Závěr. Řada konverguje pro $x=0$, jinak diverguje.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{n^2+1}$$

Řešení:

S přihlédnutím k Heineho větě totiž jednoduchým rozšířením dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Řada tudíž diverguje srovnáním s harmonickou řadou.

(k)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{k^a} - 1 \right),$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení:

Pokud $a \geq 0$, pak $\lim \left(k^{k^a} - 1 \right) = +\infty$, řada tedy diverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence $\lim a_k = 0$.

Pokud $a < 0$, pak platí

$$k^{k^a} - 1 = e^{k^a \ln k} - 1,$$

a tudíž (podle Heineho věty a věty o limitě složené funkce s přihlédnutím k faktu, že $\lim_{x\to+\infty} x^a \ln x = 0$ pro $a < 0$)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k^a} - 1}{k^a \ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{k^a \ln k} - 1}{k^a \ln k} = 1.$$

Stačí tedy podle limitního srovnávacího kritéria vyšetřit řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \ln k$$

pro $a < 0$. O této řadě víme, že pro $0 > a \geq -1$ je divergentní a pro $a < -1$ řada konverguje.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4^n} \right) \sin 2^n$$

Řešení: Vyšetříme absolutní konvergenci. Máme

$$|a_n| = \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4^n} \right) \sin 2^n \right| \leq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4^n} \right).$$

Dále LSK s $c_n = \frac{\pi}{4^n}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right)}{\left(\frac{\pi}{4^n}\right)} = 1.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Ze SK pak absolutně konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tedy i konverguje.

Heine: $x_n = \frac{\pi}{4^n}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}$$

Řešení: LSK s $b_n = \frac{1}{n}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\arccos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \arccos\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
Heine: $x_n = 1/n$,

$$\lim_{x\to 0} \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

(n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$$

Řešení: Nejprve upravíme odmocniny:

$$\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

LSK s $b_n = \frac{2}{n} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n^{3/2}}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})}{\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{2}} \\ &\overset{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{1}{1+1} \cdot 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
Několikrát Heine a VOLSF.

Bonus

3. Zkonstruujte kladnou posloupnost a_n tak, že
   (a) i. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   Řešení:
   $a_n = \frac{1}{n^2}$
   ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
   Řešení:
   $a_n = \frac{1}{n}$
   iii. $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   Řešení:
   Liché členy budou $a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)^2}$, sudé pak budou $a_{2k} = \frac{2}{(2k-1)^2}$.

4. Doplňte symboly $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$ nebo $\Rightarrow$.

Věta 1 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechť existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $K = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

$K \in (0, \infty)$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje	$\Leftrightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Diverguje
$K = 0$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje	$\Rightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Diverguje
$K = \infty$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje	$\Leftarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Diverguje