5. cvičení – Řady - Limitní srovnávací kritérium

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechť existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $K = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Pokud $K \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(b) Pokud $K = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Pokud $K = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Věta 3 (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady). Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.

Věta 4 (Heineova). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)
$$\lim_{x \to a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Fakta

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.
3. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme *harmonickou řadou.* Harmonická řada diverguje.
4. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \ln^{\beta} n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ a $\beta \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

Hinty

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$
$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$
$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$$
$$a^b = e^{b \ln a}$$

Poznámka 5. Algoritmus:

1. **NP**: Jde a_n k 0? Pokud ne, řada diverguje. (Pokud ano, nevíme nic.)
2. Má řada **nezáporné** členy? Pokud ne, zkusíme absolutní konvergenci (z ní vyplyne i konvergence).
3. Zkusíme najít řadu k **LSK**. (Častí kandidáti: $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $\sum_{n=2}^{\alpha} n^\alpha \ln^\beta n$.)
   (a) **Zlomek**: Vytkneme nejsilnější člen v čitateli i jmenovateli - s tím srovnáme.
   (b) **Odmocniny**: Není potřeba je nejdřív upravit?
   (c) **Funkce**: K čemu se blíží jejich argument? Neznáme nějakou limitu v tomto bodě? - Limita nám poradí, s čím srovnávat.
4. Umíme použít nějaký odhad zdola či shora? (např. $|\cos x| \leq 1$, $|\sin n| \leq n$, $\ln(x) \leq x-1$). Aplikujeme **SK**. (Pozor, je třeba odhadovat *zdola divergentní* a *shora konvergentní* řadou.)
5. Ještě jednou prokontrolujeme všechny implikace a **podmínky**. Napíšeme závěr.
6. **Varování**: je velký rozdíl mezi $\sin n$ a $\sin \frac{1}{n}$.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+1/n)^n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$

   (g) ✿ $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

   (h) ❀ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln n}$

2. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1}\ln\frac{n+1}{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{(n^2+1)^{-1}}-1\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\cos\frac{1}{n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2n}{1+n^2},$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2nx}{x^2+n^2},\ x\in\mathbb{R}.$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{n^2+1}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{n^a}-1\right),\ a\in\mathbb{R}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right)\sin 2^n$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\arccos\frac{1}{n}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$

Bonus

3. Zkonstruujte kladnou posloupnost a_n tak, že

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje.

(c) $\displaystyle\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje.

4. Doplňte symboly $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$ nebo $\Rightarrow$.

Věta 6 (limitní srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechť existuje $\lim\frac{a_n}{b_n}$. Označme $K=\lim\frac{a_n}{b_n}$.

$K\in(0,\infty)$	$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ Diverguje		$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ Diverguje
$K=0$	$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ Diverguje		$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ Diverguje
$K=\infty$	$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ Diverguje		$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ Diverguje

(1g) $\ln n\le n$.
(1h) SK s $1/n^2$.

Figure 1: https://marekbennett.com/2014/03/06/recursive-load