4. cvičení – Řady + Taylorův polynom - odhady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Odhady

1. Pomoci Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

   (a) $\sqrt[3]{e}$
   Řešení:
   $$\approx 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$
   kalkulačka
   $$1,39561$$

   (b) $\arcsin 0,2$
   Řešení:
   $$\approx 0,2$$
   kalkulačka
   $$0,201$$

   (c) $(1,04)^4$
   Řešení:
   $$\approx 1 + 4 \cdot 0,04 = 1,16$$
   kalkulačka
   $$1,1699$$

   (d) $\ln(1,02)$
   Řešení:
   $$\approx 0,02$$
   kalkulačka
   $$0,01980$$

   (e) $\arctan 1,1$
   Řešení:
   $$\approx 1,1$$
   kalkulačka
   $$0,83298$$

   (f) $\sin(-0,22)$
   Řešení:
   $$\approx -0,22$$
   kalkulačka
   $$-0,2182$$

2. Určete hodnotu $\cos 1^\circ$ pomocí Taylora 3. stupně.
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
Taylorův rozvoj pro kosinus je

$$T_3^{\cos x,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2},$$

pak pro $x = \frac{\pi}{180} \doteq 0,18$ máme

$$T_3^{\cos x,0}(0,18) = 1 - \frac{0,18^2}{2} = 0,9838.$$

3. Pomocí Taylorova polynomu pro $n = 3$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt[3]{30}$.
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
Zvolme $a = 27$, $n = 3$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Zderivujme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x}, & f(27) &= 3, \\ f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & f'(27) &= \frac{1}{27}, \\ f''(x) &= \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}, & f''(27) &= \frac{-2}{2187}, \\ f'''(x) &= \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}}, & f''(27) &= \frac{10}{177147}. \end{aligned}$$

Taylorův polynom pak je tvaru

$$T_3^{\sqrt[3]{x},27}(x) = 3 + \frac{x-27}{27} - \frac{(x-27)^2}{2187} + \frac{5(x-27)^3}{531441}$$

tedy

$$T_3^{\sqrt[3]{x},27}(30) = 3 + \frac{3}{27} - \frac{9}{2187} + \frac{5\cdot 27}{531441} \doteq 3,10725$$

4. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9;1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
Prvně rozvineme $\arctan x$ do Taylorova polynomu stupně 2 v bodě 1. Máme

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x, & f(1) &= \frac{\pi}{4}, \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, & f'(1) &= \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, & f''(1) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Taylorův polynom tedy je

$$T_2^{\arctan x,1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = \arctan x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 1$ do stupně $n = 2$.
Pracujeme s intervalem $[1; 1,1]$ (a pak s intervalem $[0,9; 1]$).
Protože $\arctan x \in \mathcal{C}^3$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [1; 1,1]$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Pro třetí derivaci $\arctan x$ máme

$$f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$

Konkrétně

$$\arctan x - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2\right) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{6c^2 - 2}{(1+c^2)^3}(1,1-1)^3$$

Analogicky na intervalu $[0,9; 1]$ dostaneme

$$\arctan x - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2\right) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{6c^2 - 2}{(1+c^2)^3}(0,9-1)^3$$

Dohromady lze odhadovat

$$\begin{aligned}\left|\arctan x - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2\right)\right| &\leq \left|\frac{1}{3!} \cdot \frac{6c^2 + 2}{(1+c^2)^3}(0,9-1)^3\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 1,1^2 + 2}{(1+0.9^2)^3}(0,1)^3\right| \\ &\doteq 0,000853.\end{aligned}$$

5. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = e^x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 0$ a budeme dosazovat za $x = 1$. Pracujeme tedy s intervalem $[0, 1]$. Uvažujme nějaké $n \in \mathbb{N}$. Protože $e^x \in \mathcal{C}^{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [0, 1]$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Konkrétně

$$e^1 - T_n^{e^x,0}(1) = \frac{1}{(n+1)!} e^c (1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Nejhorší situace (největší možná chyba) nastává pro $c = 1$, tedy budeme odhadovat výraz

$$\frac{e}{(n+1)!}$$

Aplikujeme odhad $e < 3$ a dostáváme nerovnici

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,001$$

Tedy

$$3000 < (n+1)!$$

Ta je splněna pro $n \geq 6$.
Tedy při aproximaci čísla e potřebujeme Taylorův polynom alespoň stupně 6. Dostáváme

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,718055556.$$

6. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?
Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html
Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = \cos x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 0$ do stupně $n = 3$ (rozvoj pro $n = 2$ a $n = 3$ je stejný). Uvažujme $x > 0$. Pracujeme tedy s intervalem $[0, x]$. Protože $\cos x \in \mathcal{C}^4$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [0, x]$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Konkrétně

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{(4)!} \cos(c)(x-0)^4 \leq \frac{x^4}{24}.$$

Řešíme tedy nerovnici

$$\frac{x^4}{24} \leq 0,0001.$$

Tedy

$$x^4 \leq 0,0024.$$

To platí cca pro $x < 0,222$. Protože funkce $\cos x$ je sudá, lze pro $x < 0$ aplikovat stejný postup.
Dohromady

$$x \in (-0,222, 0,222).$$

Řady

7. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Řešení: Užijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{2 \cdot 2^n} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

$1/2 < 1$, tedy řada konverguje.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{4^n+9^n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{9^n}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Řada konverguje.

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k$$

Použijeme zobecněné odmocninové kritérium. Je

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{2+(-1)^k}{7} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{3}{7} = \frac{3}{7} < 1,$$

řada tedy konverguje. Limes superior je nutno použít, protože limita by neexistovala, zato limes superior existovat musí.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n+3^n}$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium. Máme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^7}{2^{n+1}+3^{n+1}}}{\frac{n^7}{2^n+3^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^7}{n^7} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} < 1.\end{aligned}$$

Řada konverguje.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

Řešení: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ Podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n!n!5^n}{(n+1)!(n+1)!(2n)!5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{1}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} < 1.$$

Tedy řada konverguje.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^n$$

Řešení: Odmocninové kritérium, verze (a). Máme

$$\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \leq \frac{2}{3}$$

Ověření nerovnosti:

$$\begin{aligned} \frac{1+\cos n}{2+\cos n} &\leq \frac{2}{3} \\ 3+3\cos n &\leq 4+2\cos n \\ \cos n &\leq 1. \end{aligned}$$

Našli jsme tedy $q < 1$, které omezuje posloupnost a_n $\forall n$, tedy řada konverguje.

(h)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$$

Řešení:
Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1-2} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n-1}$$

Řešení: Vyšetříme pomocí podílového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \cdot \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} \cdot \frac{1-1/2^n}{2-1/2^n} = \frac{1}{2} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení:
Řada nekonverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

(k)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2-1}$$

$$\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{-1} = \frac{1}{e}\cdot 1 < 1,$$

tedy řada konverguje.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Řešení:
Otestujeme nejprve nutnou podmínku konvergence. Použijeme větu a převedeme n-tou odmocninu na podíl

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

8. Vyšetřete konvergenci následujících řad, $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

Řešení:
Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4 \cdot |x|^{k+1}}{k^4 \cdot |x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot |x| = |x| < 1.$$

Pokud $|x| \geq 1$, řada diverguje, neboť $\lim k^4|x|^k = +\infty$, a proto není možné, aby $\lim k^4 x^k = 0$. Tedy není splněna nutná podmínka konvergence.

Zkouškové příklady

9. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n, \qquad z \in \mathbb{R}.$

Řešení: Pro $z = 0$ jsou všechny členy řady nulové, tedy řada konverguje.
Pro $z \neq 0$ vyšetříme absolutní konvergenci podílovým kritériem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}|z|^{n+1}}{\frac{2^n}{2^n+1}|z|^n} = \lim_{n\to\infty} |z| \frac{2\cdot(2^n+1)}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} 2|z| \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} \overset{AL}{=} |z|.$$

Zatím máme, že řada konverguje pro $|z| < 1$.
Jestliže $|z| > 1$, tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

a tedy není splněna nutná podmínka konvergence pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (tato úvaha se objevuje v důkazu d'Alembertova kritéria https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf). Pak ale není splněna nutná podmínka ani pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a tedy řada diverguje. Výpočet nutné podmínky lze udělat i přímo. Pro $z > 1$ máme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^{-n}} z^n = \infty$$

Pro $z < -1$ je pro $n = 2k$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k}}{2^{2k}+1} z^{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+2^{-2k}} (z^2)^k = \infty$$

a pro lichá $n = 2k+1$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+1}+1} z^{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+2^{-2k-1}} z(z^2)^k = -\infty$$

Tedy není splněna NP.
Zbývá vyšetřit body $z = 1$, $z = -1$. Pro $z = 1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1},$$

která ale nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
Pro $z = -1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} (-1)^n,$$

která též nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
Závěr: Řada konverguje právě tehdy, když $z \in (-1, 1)$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$

Řešení: Vyšetříme absolutní konvergenci podílovým kritériem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje absolutně a tedy konverguje.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$

Řešení: Vyšetříme řadu za pomoci Cauchyho kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{e} \cdot 1 < 1.$$

Tedy řada konverguje.
Zdůvodnění limit:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Pro druhou limitu

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n+1}$$

najdeme dva strážníky

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} \to 1\cdot 1.$$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}$

Řešení: Vyšetříme řadu za pomoci podílového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(2^{2^{n+1}}+1)}{\ln(2^{4^{n+1}}+1)}}{\frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2^{2^{n+1}}+1)}{\ln(2^{2^n}+1)}\cdot\frac{\ln(2^{4^n}+1)}{\ln(2^{4^{n+1}}+1)}$$

Vytkneme nejrychlejší člen a použijeme vzorce pro logaritmus:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(2^{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)\right)}{\ln\left(2^{2^n}\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)\right)}\cdot\frac{\ln\left(2^{4^n}\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)\right)}{\ln\left(2^{4^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}\cdot\frac{4^n\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^{n+1}\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\ln 2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n}}{\ln 2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{2^n}}\cdot\frac{\ln 2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^n}}{4\ln 2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)}{4^n}}\\
&\overset{VOAL}{=} \frac{2\ln 2+0}{\ln 2+0}\cdot\frac{\ln 2+0}{4\ln 2+0} = \frac{1}{2} < 1,
\end{aligned}$$

tedy řada konverguje.