4. cvičení – Řady + Taylorův polynom - odhady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Odhady

Teorie

Věta 1 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $a < x$. Nechť f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Příklady

1. Pomoci Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)
   (a) $\sqrt[3]{e}$
   (b) $\arcsin 0,2$
   (c) $(1,04)^4$
   (d) $\ln(1,02)$
   (e) $\arctan 1,1$
   (f) $\sin(-0,22)$
2. Určete hodnotu $\cos 1°$ pomocí Taylora 3. stupně.
3. Pomocí Taylorova polynomu pro $n = 3$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt[3]{30}$.
4. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9; 1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.
5. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.
6. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?

Řady

Teorie

Věta 2 (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim a_n = 0$.

Věta 3 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **nezápornými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 4 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **kladnými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\lim a_n = \infty$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 5. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Věta 6. Nechť a_n je **kladná** posloupnost. Nechť navíc existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak existuje i

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Definice 7. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutně konvergentní*, jestliže je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Věta 8. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Algoritmus:

(a) Zkontrolujeme, že má řada **nezáporné členy**. Jinak vyšetřujeme absolutní konvergenci.

(b) Vybereme si **d'Alembertovo** nebo **Cauchyovo** kritérium a spočteme příslušnou limitu.

   i. Obvykle nezáleží, které kritérium zvolíme. Výjimkou je situace, kdy řada obsahuje nulové členy - pak musíme zvolit Cauchyho. Druhou výjimkou je případ, $\limsup > 1$, který se vyskytuje pouze u Cauchyho.

   ii. Může se stát, že limita neexistuje, pak zkusíme variantu s $\limsup$ nebo s nalezením q.

(c) Podle limity (< 1 nebo > 1) uděláme závěr: Konverguje nebo Diverguje.

(d) **Varování:** Pokud limita vyjde rovna 1, nevíme nic. Navíc pokud vyšla 1 v odmocninovém kritériu, vyjde 1 i v podílovém a naopak. Bude pak potřeba zvolit nějaké úplně jiné (nejspíš **nutnou podmínku** nebo (limitní) srovnávací).

Hinty

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Příklady

Určete, zda následující řady konvergují:

7. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n + 3^n}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n - 1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ (g) ❄ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$ (k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{7}\right)^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ (l) ♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

8. Vyšetřete konvergenci, $x \in \mathbb{R}$:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$$

Zkouškové příklady

9. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n, \qquad z \in \mathbb{R}.$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}$

- (7g) $\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right) \leq \frac{2}{3}$.
- (7l) Věta 6 a NP.