3. cvičení – Taylorův polynom - limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh -1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + 2x^3}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \sin(x\ln(1+x))}{x^2}$

$*$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$

$*$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}$

$*$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right]$

$*$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$

(k) ❀ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$

(m) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0.$

(n) Najděte takové $n \in \mathbb{N}$, aby limita byla konečná a různá od nuly: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{x^n}$

(o) Najděte takové $n \in \mathbb{N}$, aby limita byla konečná a různá od nuly:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x)}{x^n}$

Zkouškové příklady

2. (a) Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/ls/ma/index.html Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \arctan(\sin x) - \sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x)(\cos x) - \arctan x}$$

(b) Určete hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - a\sin\frac{x}{a}} = 1.$$

(c) Rozviňte funkce $e^{\cos x}$ do Taylorova polynomu čtvrtého řádu se středem v 0 a spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4}$$

(pokud existuje) v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

(d) Určete všechny hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které existuje vlastní limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\arctan x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4}$$

Pro tyto hodnoty a limitu vypočítejte.

(e) Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) + x\arctan(bx) - b}{x^4}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočítejte.

(1e) Substituujeme $y = \frac{1}{x}$
(1f) Substituujeme $y = \frac{1}{x}$
(1g) Substituujeme $y = \frac{1}{x}$
(1h) Substituujeme $y = \frac{1}{x}$
(1k) Koukněte na Hinty nahoře.