2. cvičení – Taylorův polynom - limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

   Řešení: Taylorův rozvoj:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

   (Šlo by i provést dvakrát l'Hospitalovo pravidlo.)

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}$

   Řešení: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = -\frac{1}{12}$

   Řešení: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^5))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4!} - \frac{1}{4}\frac{1}{2!} + \frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{12}.$$

   (d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$

   Řešení: Převedeme na společný jmenovatel a rozvineme funkci sinus v čitateli.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/3! + o(x^4) - x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x \sin x} + \frac{o(x^4)}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{x \sin x} \cdot \frac{o(x^4)}{x^4} \cdot x^2\right) = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0.$$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \dfrac{19}{90}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do pátého řádu. Platí, že

$$\sin(\sin x) = \sin\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^5 + o(x^6) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - \frac{1}{3!}\left(x^3 - 3x^2\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6)$$

Odtud vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6) - x(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^6))}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{10}x^5 + o(x^6) + \frac{1}{9}x^5 + o(x^6)}{x^5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90}.$$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x} = \dfrac{4}{3}$

Řešení: Nejprve použijeme známou limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1.$$

Pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\arctan^3 x}$$

Druhý zlomek jde do 1. První limitu spočteme pomocí Taylora.
Rozvineme čitatel do třetího řádu. Dostaneme

$$e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x = 1 + (x^2+x) + \frac{(x^2+x)^2}{2!} + \frac{(x^2+x)^3}{3!} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + 3\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) - 4 + o(x^3)$$

$$= 2\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{4}{3} + 0.$$

Hledaná limita je tedy rovna

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\arctan^3 x} \overset{AL}{=} \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x} = \dfrac{1}{9}$

Řešení: Podle základních limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

napíšeme

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)^2}{(\cos x - 1)^2} \cdot \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8}$$

Poslední zlomek vyřešíme Taylorem. Rozvineme čitatel

$$e^{x^2} - 1 = 1 + x^2 - 1 + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies (\sin x - x)^2 = \frac{x^6}{36} + o(x^6)$$

a dohromady dostaneme

$$(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2 = \frac{x^8}{36} + o(x^8)$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8} = \lim_{x\to 0} \cdot \frac{\frac{1}{36}x^8 + o(x^8)}{x^8} = \frac{1}{36}.$$

Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2)^2}{(\cos x - 1)^2} \cdot \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8} \overset{AL}{=} 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \ln^2 a$, $a > 0$

Řešení: Protože platí $a^x = e^{x \ln a}$, je

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + o(x^2)$$

$$a^{-x} = e^{-x\ln a} = 1 - x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + o(x^2)$$

a dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + 1 - x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a - 2 + o(x^2)}{x^2} = \ln^2 a.$$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = \dfrac{1}{3}$

Řešení: Nejprve převedeme na společný jmenovatel, pak rozvineme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} =$$

Díky známým limitám víme, že jmenovatel se chová jako x^3, tedy budeme rozvíjet do třetího řádu.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3))}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x + \frac{x^3}{2!} + o(x^4)}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^3}\right) \cdot \frac{x}{\sin x} \overset{AL}{=} \left(\frac{1}{3} + 0\right) \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2$

Řešení:

Rozvojem do 3. řádu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^3/6 + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{1}{1/6 + \frac{o(x^3)}{x^3}} \overset{AL}{=} \left(\frac{1}{3} + 0\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{6} + 0}\right) = 2$$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(e^x - 1)(e^{-x^2} - 1)^2} = -\dfrac{1}{4}$

Řešení:

Protože

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{(-x^2)} = 1,$$

dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(e^x - 1)(e^{-x^2} - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{x \cdot (-x^2)^2} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{(-x^2)^2}{(e^{-x^2} - 1)}$$

První zlomek rozvineme do 5. řádu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5)) + x^3 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{4}.$$

Dohromady

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{x \cdot (-x^2)^2} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{(-x^2)^2}{(e^{-x^2} - 1)} \overset{AL}{=} -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{4}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2 \sin x - \arctan x - x} = -\dfrac{1}{11}$

Řešení: Z definice Taylorova polynomu můžeme odvodit, že platí

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

Odtud dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x-\operatorname{tg}x-x}{2\sin x-\arctan x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5\right)-\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)-x+o(x^6)}{2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)-x+o(x^6)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{20}x^5-\frac{2}{15}x^5+o(x^5)}{\frac{1}{60}x^5-\frac{1}{5}x^5+o(x^5)}=\frac{\frac{1}{60}}{\frac{-11}{60}}=-\frac{1}{11}.$$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$(\cos x)^{\sin x}=e^{\sin x\ln(\cos x)}=e^{(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))\cdot(\ln(1-x^2/2+o(x^3))}=$$

$$=e^{(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))\cdot(-x^2/2+o(x^3))}=e^{-x^3/2+o(x^3)}=1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

a tudíž

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^3/2+o(x^3))}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Bonus

2. Určete, zda je pravda: Má - li funkce derivace všech řádů a Taylorova řada konverguje, tak už konverguje k původní funkci.

Řešení: Nikoli. Uvažujme funkci

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Pak $T_n^{f,0}=0$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$. Tedy Taylorův polynom aproximuje funkci pouze v 0.

3. Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce $\sin x+\sinh x$.

Řešení: Zdroj: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

Prve zjistíme 2. derivaci.

$$f''(x)=-\sin x+\sinh x$$

Rozvineme do Taylorova polynomu 5. stupně:

$$-\sin x+\sinh x=-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)+x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$
$$=\frac{2x^3}{6}+o(x^5)=x^3\left(\frac{1}{3}+o(x^2)\right).$$

Odtud máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

Tedy z definice limity existuje $\delta>0$ tak, že

$$\frac{f''(x)}{x^3}>\frac{1}{6}\qquad x\in P(0,\delta).$$

Ale odtud je $f''(x)<0$ na $P^-(0,\delta)$ a $f''(x)>0$ na $P^+(0,\delta)$.

Závěr: Podle postačující podmínky pro inflexi má funkce f v bodě 0 inflexní bod.

4. Zjistěte, pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ lokální maximum v bodě 0.
Řešení: Zdroj: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf
Rozvineme do Taylora v bodě 0. Máme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2\,x^4}{+\,24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6),$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + o(x^6).$$

Celkem

$$f(x) = x^4 \left(\frac{12C - 1}{12} \right) + \frac{14x^6}{720} + o(x^6).$$

Označme $a = \frac{12C-1}{12}$. Jestliže je $C > \frac{1}{12}$, tak je $a > 0$. Dále můžeme psát

$$f(x) = x^4 \left(a + \frac{14x^2}{720} + o(x^2). \right)$$

Navíc platí

$$\lim_{x \to 0} a + \frac{14x^2}{720} + o(x^2) - a.$$

Tedy z definice limity existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\frac{f(x)}{x^4} > \frac{a}{2}, \qquad x \in P(0, \delta).$$

Odtud $f(x) > 0$ na $P(0, \delta)$. Navíc $f(0) = 0$. Tedy f má v bodě 0 lokální minimum.
Pro $C < \frac{1}{12}$ analogicky vyjde, že f má v 0 lokální maximum.
Případ $C = \frac{1}{12}$: Z rozvoje máme

$$f(x) = \frac{14x^6}{720} + o(x^6) = x^6 \left(\frac{14}{720} + o(1) \right).$$

Analogicky jako výše pak vyjde v 0 lokální minimum.