



2. cvičení – Taylorův polynom - limity

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmus

1. Trochu jako u L'Hospitala: Pokud je to nutné, převedeme na jeden zlomek. Pokud to lze, použijeme známé limity - tím zjednodušíme výraz.
2. Odhadneme, do jakého řádu budeme rozvíjet. Nápověda:
 - (a) Stupeň ve jmenovateli.
 - (b) Rozvíjíme do takového stupně, aby nám zbyla nějaká x (nesmí se nám všechno „požrat“).
3. Rozvineme. Nezapomeneme na opatrnou práci s óčky.
4. Vytkneme nejvyšší člen. Dopočteme.

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$$

$$(d) \clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$

$$(f) \clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3 \cos x - 4}{\arctan^3 x}$$

$$(g) \clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}, a > 0$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - x}{x - \sin x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x - \tg x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \tg x - x}{2 \sin x - \arctan x - x}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$$

Bonus

2. \clubsuit Určete, zda je pravda: Má - li funkce derivace všech řádů a Taylorova řada konverguje, tak už konverguje k původní funkci.
3. \heartsuit Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce $\sin x + \sinh x$.
4. \clubsuit Zjistěte, pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ lokální maximum v bodě 0.

(1d) Prve na společný jmenovatel.
 (1f) Nejprve použijeme známou limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$.
 (1g) Nejprve použijeme známé limity.

$$\left. \begin{aligned} (2) \text{ Uvažujeme } f(x) &= \left. \begin{aligned} e^{-1/x^2}, \\ x \neq 0, \\ 0, \end{aligned} \right\} x = 0, \\ (3) \text{ Prve 2x zderivujeme, pak rozvíjíme do Taylora v 0. Vytkneme } x^3 \text{ a zkompleťme znaménko 2. derivace.} \\ (4) \text{ Rozvíjíme do Taylora, vytkneme } x^4 \text{ a zkompleťme znaménko funkce kolem 0.} \end{aligned}$$