Poznámka 17.2. Na nekompaktní množině $X \subset \mathbb{R}^p$ nemusí mít maximum (resp. minimum) ani omezená spojitá funkce $f : X \to \mathbb{R}$ mající stacionární body; příkladem takové funkce v $\mathbb{R}^2$ je $\operatorname{arctg}(x^3y^3)$, jejímiž stacionárními body jsou právě všechny body ležící na některé ze souřadnicových os.

Na žádný problém s extrémy nenarazíme u funkcí $f : X \to \mathbb{R}$ neomezených shora i zdola; je zřejmé, že maximum ani minimum nemají a že $\inf f(X) = -\infty$, $\sup f(X) = +\infty$.

Pro funkci omezenou zdola (resp. shora) se problém existence a nalezení minima (resp. maxima) na nekompaktní množině dá leckdy rozřešit pomocí tohoto jednoduchého tvrzení:

Věta 17.2. *Nechť množiny X a K leží v nějakém metrickém prostoru, přičemž K nechť je neprázdná kompaktní množina splňující podmínku $\operatorname{int} K \subset X$. Funkce $f : (X \cup K) \to \mathbb{R}$ nechť je spojitá v K a nechť existuje bod $x_0 \in \operatorname{int} K$ tak, že platí implikace*

$$x \in \partial K \cup (X - K) \ \Rightarrow\ f(x) > f(x_0) \ \ (\text{resp. } f(x) < f(x_0)). \tag{25}$$

Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\operatorname{int} K$. $\square$

Protože při aplikaci právě vyslovené věty je důležité dobře rozumět jejímu mechanismu, připojíme krátký důkaz, a to pro funkci omezenou zdola; pro funkci omezenou shora je argumentace obdobná:

Minimum funkce $f|K$ existuje podle důsledku věty 12.7; označíme-li je A, je zřejmě $A \le f(x_0)$. Podle (25) nenabývá f hodnoty A nikde v $\partial K \cup (X - K)$; protože $X \cup K = \operatorname{int} K \cup \partial K \cup (X - K)$, plyne z toho, že všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = A$, leží v $\operatorname{int} K$. Z inkluze $\operatorname{int} K \subset X$ ihned plyne, že A je minimem funkce f v X. $\square$

V dalším budeme hledat extrémy jen v případech, kdy X leží v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$. Jak víme, funkce $f : X \to \mathbb{R}$ může nabýt svého minima a maxima v X jen v některém stacionárním bodě ležícím v $\operatorname{int} X$, nebo v některém bodě z $\operatorname{int} X$, v němž f není diferencovatelná, nebo v některém bodě z ∂X. V konkrétních případech zpravidla najdeme v $\operatorname{int} X$ všechny stacionární body funkce f a všechny body, v nichž f není diferencovatelná, a vypočteme hodnoty ve všech těchto bodech; v závislosti na tom pak sestrojíme množinu K splňující předpoklady V.17.2.

Příklad 17.5°. Vyšetřme extrémy funkce

1a)

$$f(x,y) := x^3 - 3xy + y^3 \ \text{ v } \ X := \langle 0, +\infty)^2 . \tag{26}$$

Tato funkce je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$; protože není v X omezená shora, je $\sup f(X) = +\infty$, a zbývá zabývat se jejím minimem.

Rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y^2 = 0 \tag{27}$$

mají – jak snadno zjistíme – právě dva společné kořeny, a to body $(0,0)$ a $(1,1)$, ale jen druhý z nich leží v $\operatorname{int} X$. Protože $f(1,1) = -1$, stačí najít kompaktní množinu $K \subset X$ tak, aby bod $(1,1)$ ležel v $\operatorname{int} K$ a aby f byla např. nezáporná všude v $\partial K \cup (X - K)$; tím dokážeme, že jediným bodem, v němž má funkce $f \,|\, X$ minimum, je bod $(1,1)$.

Protože výrazy x^3 a y^3 jsou všude v X nezáporné a v $\operatorname{int} X$ dokonce kladné, je třeba nějak odhadnout vliv nekladného (a v $\operatorname{int} X$ záporného) výrazu $-3xy$. Zřejmě však platí implikace

$$x \geq 3 \;\Rightarrow\; f(x,y) \geq x^3 - 3xy \geq 3x(3-y) \geq 0\,, \text{ je-li } y \leq 3\,, \tag{28}$$

a ze symetrie plyne, že

$$f(x,y) \geq 0\,, \text{ je-li } y \geq 3,\; x \leq 3\,; \tag{29}$$

kromě toho platí implikace

$$x \geq 3,\; y \geq 3 \;\Rightarrow\; f(x,y) \geq 3(x^2 - xy + y^2) = 3((x-y)^2 + xy) \geq 0\,. \tag{30}$$

Množina $K := \langle 0,3 \rangle^2$ má zřejmě všechny žádané vlastnosti, protože každý bod $x \in \partial K \cup (X - K)$ leží buď na některé souřadnicové ose, nebo splňuje některou z podmínek $(x \geq 3) \wedge (y \leq 3)$, $(x \leq 3) \wedge (y \geq 3)$, $(x \geq 3) \wedge (y \geq 3)$; ve všech těchto případech je $f(x,y) \geq 0 > \min f(K) = f(1,1) = -1$.

Příklad 17.6$^{\mathbf{o}}$. Hledejme extrémy funkce

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \quad \text{v} \quad X := \mathbb{R}_+^2\,. \tag{31}$$

Protože $x^2 + xy + y^2 = 0$ jen pro $(x,y) = (0,0)$, je funkce f třídy C_∞v množině $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; protože f je v X nezáporná a neomezená shora, budeme se zabývat jen jejím minimem.

Stacionární body funkce f najdeme řešením rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y - \frac{2x + y}{(x^2 + xy + y^2)^2} = 0\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x + 2y - \frac{x + 2y}{(x^2 + xy + y^2)^2} = 0\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Vynásobíme-li první z rovnic výrazem $(x + 2y)$, druhou výrazem $-(2x + y)$ a sečteme-li výsledky, získáme rovnici $4(x^2 - y^2) = 0$ jako nutnou (ale samozřejmě nikoli postačující) podmínku, aby bod (x,y) byl stacionární. Musí tedy být $y = \pm x$; protože však žádné body tvaru $(x,-x)$ v X neleží, musí být dokonce $y = x$. Dosadíme-li to do (32) a vynásobíme-li výsledek výrazem $3x^3$, získáme rovnici $3x^4 = 1$, která má v $\mathbb{R}_+$ jediný kořen, a to $a := 3^{-1/4} \doteq 0.7598$; jak snadno zjistíme, je $f(a,a) = 2\sqrt{3} \doteq 1.1547$.

Celkem tedy máme 6 podezřelých bodů: $[0,0]$, $[1,0]$, $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Dosazením do funkce f dostaneme, že

$$\mathbf{M} = \mathbf{f}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) = \mathbf{f}\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) = \frac{3}{2},$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{f}([\mathbf{0},\mathbf{0}]) = \mathbf{0}.$$

1b)

c) $f(x,y) := (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $S = \mathbb{R}^2$. Zřejmě $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, kde $g(t) = te^{-t}$. Obor hodnot funkce x^2+y^2 je $[0,\infty)$. Tedy potřebujeme vyšetřit průběh funkce g na tomto intervalu – zajímají nás minima a maxima. Jednoduchým zderivováním dostaneme, že minimum má funkce g v nule ($g(0) = 0$) a maximum má v bodě 1 ($g(1) = \frac{1}{e}$).

Zbývá si rozmyslet, kdy je x^2+y^2 rovno 0 a 1. Což je triviální, dostaneme tedy, že **minimum funkce f na $\mathbb{R}^2$ je 0, které se nabývá pouze v nule, a maximem je $\frac{1}{e}$ a nabývá se ho ve všech bodech kde $\mathbf{x^2+y^2=1}$, to jest na jednotkové kružnici se středem v počátku.**

d) $f(x,y) := \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $S = \{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{y^2} = 1\}$.

$$\mathbf{M} = \mathbf{f}\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{3}\right]\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{f}\left(\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{3}\right]\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

K řešení se dá dorazit třeba vyšetřením pomocné úlohy $f(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \widetilde{x}+\widetilde{y}$ na množině $\widetilde{S} = \{\widetilde{x}^2+3\widetilde{y}^2 \le 1\}$. Zpátky se pak dá vrátit substitucí $\widetilde{x} = \frac{1}{x}$ a $\widetilde{y} = \frac{1}{y}$.

Hranice množiny $\widetilde{S}$ je elipsa, a lze ji parametrizovat například takto:

$$x = \cos t,$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,$$
$$t \in [0,2\pi).$$

e) $f(x,y,z) := (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$, $S = \{x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Zde množina není kompaktní, a tedy maxima ani minima se nabývat nemusí. A vskutku se ho ani nenabývá – stačí si funkci zderivovat a využít Věty 4.

Můžeme vyšetřit, kde se nabývá infima a suprema. Abychom s úlohou mohli nějak pracovat, tak je třeba se omezit na nějaký kompakt – množinu tedy uzavřeme a omezíme. Zjistíme, že uvnitř žádné podezřelé body nejsou. Nejsou dokonce ani na hraničních čtvrtrovinách. Zbývají hraniční přímky, kde nalezneme podezřelé body $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,\frac{1}{2},0]$ a $[0,0,\frac{1}{3}]$.

Infimum je $0 = f([0,0,0])$ a supremum je $\frac{1}{e} = f([1,0,0])$.

což je ovšem ve sporu s první rovnicí z výše uvedené soustavy. Proto $\mu \neq 0$, a tedy $y = z$. Protože $(x, y, z) \in M_2$, dostáváme $x^2 + 2y^2 = 1$ a $x^3 + 2y^3 = 0$. To splňují jedině body $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}\right)$.

Nalezli jsme tedy sedm podezřelých bodů, mezi nimiž jsou body, v nichž se nabývá extrémů. Funkční hodnoty v nich jsou 0, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\pm\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}$. Snadno zjistíme, že $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, a tudíž maximum je $1/\sqrt{2}$ (nabývá se v bodech $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ a $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$) a minimum je $-1/\sqrt{2}$ (nabývá se v bodech $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ a $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$). ■

Všimněte si, že jsme uvedené soustavy rovnic neřešili „až do konce“. Naším cílem nebylo totiž najít právě všechna řešení (což je potřebné při vyšetřování lokálních extrémů), ale jen co nejjednodušeji najít co nejmenší množinu obsahující všechna řešení. Nevadilo by nám, kdyby obsahovala několik málo bodů navíc.

§69. V případě, že nás zajímají extrémy spojité funkce na nekompaktní množině, lze někdy množinu redukovat na kompaktní pomocí vyšetření „limitního chování v nekonečnu“.

1c) <u>Příklad</u> Najděte extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2-2y^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Zatímco funkce f je zřejmě spojitá, množina $\mathbb{R}^2$ není kompaktní. Nicméně tvar funkce f umožňuje provést některé úvahy. Jednak je funkce f zřejmě nezáporná a nulové hodnoty nabývá jen v počátku. Proto má minimum 0. Dále můžeme usoudit, že pro body „hodně vzdálené“ od počátku budou funkční hodnoty „hodně malé“, protože „exponenciála převáží polynom“. Tyto úvahy lze zformulovat přesně. Využijme faktu, že $\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$ (což ověříme například l'Hospitalovým pravidlem).

Je totiž $f(x, y) \leq 7(5x^2 + 2y^2)e^{-(5x^2+2y^2)}$ na celém $\mathbb{R}^2$. Protože $\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$, existuje $R > 0$ takové, že pro $t \geq R$ platí $te^{-t} < \frac{1}{14}f(1, 1)$. Uvažme množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 2y^2 \leq R\}$. Tato množina je uzavřená a omezená (jde o nějakou elipsu se středem v počátku), je tedy kompaktní. Funkce f na M tudíž nabývá svého maxima v nějakém bodě (x_0, y_0). Pokud je bod (x, y) mimo M, je $f(x, y) < \frac{1}{2}f(1, 1)$ (to plyne z volby R). Proto bod $(1, 1)$ patří do množiny M, a tedy $f(x_0, y_0) \geq f(1, 1)$. Tudíž pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ platí $f(x_0, y_0) > f(x, y)$. Proto funkce f má v bodě (x_0, y_0) maximum na $\mathbb{R}^2$.

Tím jsme ukázali, že f nabývá svého maxima na $\mathbb{R}^2$. Protože množina $\mathbb{R}^2$ je otevřená, stačí najít body, v nichž má f nulové parciální derivace prvního řádu a z nich vybrat ten, v němž je největší funkční hodnota.

Jest $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - 10x(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2-2y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = (14y - 4y(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2-2y^2}$. Obě jsou nulové, právě když $2x - 10x(x^2 + 7y^2) = 0$ a $14y - 4y(x^2 + 7y^2) = 0$. Jsou čtyři možnosti:

(i) $x = 0$ a $y = 0$ – tím dostaneme již známý bod minima $(0, 0)$.

(ii) $x = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – odtud dostaneme dva body $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. V obou je hodnota f rovna $\frac{7}{2e}$.

(iii) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $y = 0$ – odtud dostaneme dva body $(1/\sqrt{5}, 0)$ a $(-1/\sqrt{5}, 0)$. V obou je hodnota f rovna $\frac{1}{5e}$.

(iv) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – tento případ však nemůže nastat, protože výraz $x^2 + 7y^2$ nemůže být zároveň $1/5$ i $7/2$.

Nyní porovnáním výsledků dostaneme, že funkce f nabývá maxima $\frac{7}{2e}$ v bodech $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. ■

§70. Pokud funkce extrémů nenabývá, nebo alespoň nevíme předem, zda nabývá, hledáme supremum a infimum. Přitom nám někdy může pomoci následující pozorování.

Nechť funkce f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ *a* $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Toto se hodí například v případě, že množina M je omezená. Pak totiž její uzávěr je kompaktní, a je-li f na $\overline{M}$ spojitá, pak můžeme na $\overline{M}$ najít extrémy, a tím určíme supremum a infimum na M.

<u>Příklad</u> Najděte supremum a infimum funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$. Existuje minimum a maximum funkce f na M?

Řešení. Množina M je otevřená a f má všude na M parciální derivace. Pokud tedy má f extrém v nějakém bodě M, musí v něm být parciální derivace prvního řádu nulové, tj. $\cos x = 0$ a $\cos y = 0$. To splňují body tvaru $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Žádný z těchto bodů ovšem v M neleží. Proto f na M extrémů nenabývá.

Nicméně funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a $\overline{M}$ je kompaktní (M je otevřený kruh o středu 0 a poloměru $\pi/2$, $\overline{M}$ je příslušný uzavřený kruh). Proto f nabývá extrémů na $\overline{M}$. Protože v M extrémy nemá, nabývá jich na hranici, tj. na množině $\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = \pi^2/4\}$. (Jelikož M je otevřená, je $\partial M = \overline{M} \setminus M$.) To je kružnice, a tedy bychom ji mohli parametrizovat jako v §67. Tento postup necháváme na čtenáři, zde použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů z §68.

Funkce $g(x, y) = x^2 + y^2 - \pi^2/4$ je třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, její parciální derivace jsou $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$. Obě jsou nulové pouze v bodě $(0, 0)$, který neleží v ∂M. Proto, má-li funkce f v nějakém bodě ∂M lokální extrém (vzhledem k ∂M), existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, pro které platí:

$$\begin{aligned} \cos x + \lambda \cdot 2x &= 0, \\ \cos y + \lambda \cdot 2y &= 0, \\ x^2 + y^2 - \pi^2/4 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic dostáváme, že $y \cos x - x \cos y = 0$. Všimněme si, že nemůže být $x = 0$ ani $y = 0$. Jinak by totiž nebyla splněna první nebo druhá rovnice. Proto všechna (x,y,z) různá od bodů (39) je $|f(x,y,z)| < U$), stačí najít kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^3$, která obsahuje všech 15 stacionárních bodů uvnitř, přičemž

$$(x,y,z) \in \partial K \cup (\mathbb{R}^3 - K) \ \Rightarrow\ |f(x,y,z)| < U\,. \tag{43}$$

Funkce $g(r)$ je kladná v $\mathbb{R}_+$ a má derivaci $g'(r) = 3r^2(3-2r^2)\exp(-r^2)$ zápornou všude v intervalu $(\sqrt{3/2}\,, +\infty)$, takže tam klesá. Z nerovností $|f(x,y,z)| \le g(r)$, $e^3 > 20$ plyne, že

$$g(3) = \frac{3^4}{e^9} < \frac{100}{20^3} = \frac{1}{80} = 0.0125 < U\,;$$

za K tedy stačí zvolit uzavřenou kouli $\overline{U((0,0,0),3)}$.

Příklad 17.8. Funkce f třídy C_∞ definovaná rovností

$$f(x,y) := 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3} \quad \text{v} \quad X := \mathbb{R}^2_+ \tag{44}$$

je nezáporná a shora neomezená. Jediným společným řešením rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - \frac{8y}{x^3} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x^2} - \frac{81}{y^4} = 0 \tag{45}$$

v X je bod $(x,y) = (2,3)$, přičemž $f(2,3) = 10$. Tvrdíme, že *f má v bodě $(2,3)$ minimum*.

Abychom to dokázali, stačí najít kompaktní množinu $K \subset X$ obsahující bod $(2,3)$ uvnitř a splňující podmínku

$$(x,y) \in X - \operatorname{int} K \ \Rightarrow\ f(x,y) > 10\,. \tag{46}$$

Uvažme především, že všechny tři sčítance na pravé straně (44) jsou v X kladné, takže $f(x,y)$ je větší než kterýkoli z nich. Uvažme konkrétněji, že

1) $f(x,y) > 3x \ge 10$, je-li $x \ge 4$;[5]

2) $0 < x \le 4 \Rightarrow f(x,y) > 4y/x^2 \ge \frac{1}{4}y \ge 10$ pro všechna $y \ge 40$;

3) $f(x,y) > 27/y^3 \ge 10$, je-li $y^3 \le 2.7$, tedy jistě pro všechna $y \in (0,1\rangle$;

4) $y \ge 1 \Rightarrow f(x,y) > 4y/x^2 \ge 4/x^2 \ge 10$, je-li $x^2 < \frac{2}{5}$, tedy jistě pro $x \in (0, \frac{3}{5}\rangle$ (protože $\left(\frac{3}{5}\right)^2 < \frac{2}{5}$).

Z 1)−4) je patrné, že stačí položit

$$K := \langle \tfrac{3}{5}, 4\rangle \times \langle 1, 40\rangle\,. \tag{47}$$

* * *

[5]) Místo „4“ bychom samozřejmě mohli napsat „10/3“, ale pro jednoduchost dalších výpočtů i zápisu se vyhýbáme zbytečným zlomkům. Je zřejmé, že při hledání množiny K máme značnou volnost, a to nejen v tomto konkrétním případě. Je-li (v obecném případě) $a \in X$ jediný bod, pro nějž je $A := \min f(X) = f(a)$, splňuje *každá* kompaktní množina $K \subset X$, obsahující bod a uvnitř, podmínku $x \in X - \operatorname{int} K \Rightarrow f(x) > A$. Hlavním kritériem pro výběr množiny K je proto *jednoduchost ověření této podmínky za situace, kdy existenci minima teprve dokazujeme.*

Tedy pokud $g'(x) = 0$, pak $x = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Máme tedy podezřelé body $[\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Zahrneme ještě do úvahy krajní body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.

Při vyšetřování f na M_2 nám vyjdou body $[\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$. Porovnáním hodnot ve všech podezřelých bodem zjistíme, že

$$\min f(M) = f\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$
$$\max f(M) = f\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

♣

11.8.40. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z, \quad M = \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Množina M není omezená. Vzhledem k tomu, že

$$f(x, y, z) = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14, \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3,$$

nabývá f svého minima $\min f(M) = -14$ v bodě $[-1, -2, 3]$. Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} f(n, -2, 3) = \infty,$$

supremum f na M je rovno ∞. ♣

11.8.41. Příklad. Zjistěte supremum a infimum funkce f na množině M, pokud

1-e)

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}, \quad M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 x > 0, y > 0, z > 0\right\}.$$

Řešení. Funkce f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$ a $\overline{M} = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$. Ze spojitosti f na $\mathbb{R}^3$ plyne rovnost $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Vyšetříme nejprve body podezřelé z extrému, které leží v $\operatorname{Int} \overline{M} = M$. V Těchto bodech musí být $\nabla f(x, y, z) = o$, tj.

$$e^{-(x+2y+3z)}\,[1 - (x + y + z), 1 - 2(x + y + z), 1 - 3(x + y + z)] = o.$$

Tato soustava však nemá řešení, a tedy v M žádný bod podezřelý z extrému neleží.

Uvažujme nyní jednu ze „stěn“ tvořící ∂M, například

$$M_1 = \{[x, y, 0];\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Pak máme funkci $g(x, y) = f(x, y, 0) = (x + y)e^{-(x+2y)}$ na $N = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0\}$. Jako výše dostaneme, že g nemá v $\operatorname{Int} N$ podezřelý bod. Musíme tedy uvažovat $\partial N = N_1 \cup N_2$, kde

$$N_1 = \{[x, 0];\ x \geq 0\}, \quad N_2 = \{[0, y];\ y \geq 0\}.$$

Funkce $h(x) = g(x, 0) = xe^{-x}$, $x \in [0, \infty)$, má bod podezřelý z extrému v 0 a v bodě, kde $h'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0$, tj. v $x = 1$. Dostáváme tak body

$$[0, 0, 0], [1, 0, 0].$$

V množině N_2 dostáváme další podezřelý bod $[0, \frac{1}{2}, 0]$. Tím máme vyřešenu otázku množiny N.

Zbývající stěny tvořící ∂M poskytnou bod $[0, 0, \frac{1}{3}]$.

Funkce f je zjevně nezáporná na $\overline{M}$, tedy

$$\in f(M) = \min f(\overline{M}) = f(0,0,0) = 0.$$

Zbývá dokázat, že

$$\sup f(M) = \max f(\overline{M}) = f(1,0,0) = e^{-1}.$$

K tomuto účelu uvažujme odhad

$$f(x,y,z) \leq \frac{x+y+z}{e^{x+y+z}}, \quad [x,y,z] \in \overline{M}. \tag{11.35}$$

Jelikož $\lim_{r\to\infty} \frac{r}{e^r} = 0$, existuje $r > 1$ takové, že $\frac{r}{e^r} < e^{-1}$. Uvažujme množinu

$$K = \left\{[x,y,z] \in \overline{M};\ x+y+z \leq r\right\}.$$

Pak K je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f tedy nabývá na K svého maxima, přičemž z výpočtů výše a (11.35) plyne, že $\max f(K) = f(1,0,0)$. Díky (11.35) dále máme, že $\max f(K) = \max f(\overline{A})$. Tím je důkaz dokončen. ♣

11.8.42. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M, kde

$$f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z, \quad M = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1].$$

Řešení. Množina M je zjevně kompaktní a f je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^3$. Proto nabývá na M svých extrémů. Pokud $x, y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ splňují $z_1 < z_2$, pak $f(x,y,z_1) < f(x,y,z_2)$. Tedy f nabývá své maximum na $M_1 = [-1,1] \times [-1,1] \times \{1\}$ a minimum na $M_2 = [-1,1] \times [-1,1] \times \{-1\}$.

K určení maxima tak vyšetřujeme maximum funkce $g(x,y) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 1$ na množině $[-1,1] \times [-1,1]$. Jelikož $g(x,y) = 2\operatorname{dist}([x,y],0)^2 + 1$, vidíme, že body v $[-1,1] \times [-1,1]$ nejvzdálenější od počátku jsou $[1,1], [-1,1], [-1,-1], [1,-1]$.

Podobně postupujeme při hledání minima a dospějeme k bodu $[0,0]$. Tedy

$$\begin{aligned}
&\min f(M) = f(0,0,-1) = -1,\\
&\max f(M) = f(1,1,1) = f(1,-1,1) = f(-1,-1,1) = f(-1,1,1) = 5.
\end{aligned}$$

♣

11.8.43. Příklad. Určete supremum a infimum funkce f na množině M, kde

$$f(x,y) = x+y, \quad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Řešení. Množina M je zřejmě uzavřená. Díky Příkladu 11.8.29 víme, že M je omezená a tedy je kompaktní. Funkce f je spojitá, a tedy nabývá na M svých extrémů. Použijeme Větu 11.5.8 pro $G = \mathbb{R}^2$, $m = 1$ a $g(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Platí

$$\nabla g(x,y) = (3x^2 - 2y, 3y^2 - 2x),$$

rovnici můžeme upravit na tvar $\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos y}{y}$. Přitom $(\frac{\cos t}{t})' = \frac{-(\sin t)\cdot t - \cos t}{t^2}$. Proto je funkce $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ klesající na $(0, \pi/2]$ i na $[-\pi/2, 0)$. Protože navíc pro $t \in (0, \pi/2]$ je $\frac{\cos t}{t} > 0$ a pro $x \in [-\pi/2, 0)$ je $\frac{\cos t}{t} < 0$, je tato funkce prostá na $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$. Jelikož $(x, y) \in \partial M$ implikuje $x, y \in [-\pi/2, \pi/2]$, z rovnosti $\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos y}{y}$ plyne $x = y$. Takové body jsou v ∂M dva: $(\pi/\sqrt{8}, \pi/\sqrt{8})$ a $(-\pi/\sqrt{8}, -\pi/\sqrt{8})$. V prvním z nich nabývá f na $\overline{M}$ maxima, ve druhém minima.

Proto, podle tvrzení na počátku paragrafu, je $\sup f(M) = 2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}}$ a $\inf f(M) = -2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}}$. ■

12 P ř í k l a d Najděte $f(M)$, je-li $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y > 0\}$ a $f(x, y) = (7x + 10y)e^{-x-y}$.

Řešení. Protože funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a množina M je konvexní, a tedy souvislá, je $f(M)$ souvislá podmnožina $\mathbb{R}$. Proto je $f(M)$ interval. Stačí tudíž určit supremum a infimum funkce f na M a zjistit, zda f těchto hodnot nabývá.

Množina M je otevřená a f má všude parciální derivace. Má-li tedy f v nějakém bodě M extrém, má tam parciální derivace nulové. Necháváme čtenáři ověřit, že takový bod neexistuje. Proto f nenabývá extrémů (a tedy $f(M)$ je otevřený interval).

Podle tvrzení na počátku paragrafu je $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Přitom $\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0\}$.

Postupujme podobně jako v příkladu v §69. Je $f(0, 0) = 0$ a $f \geq 0$ na $\overline{M}$. Tudíž $\inf f(M) = 0$.

Abychom nalezli supremum f na M, uvědomme si nejprve, že f nabývá na $\overline{M}$ maxima. Pro $(x, y) \in \overline{M}$ platí totiž $f(x, y) \leq 10(x + y)e^{-x-y}$. Protože platí $\lim_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$, existuje $T > 0$ takové, že pro $t \geq T$ je $te^{-t} < \frac{1}{10} f(1, 1)$. Pak funkce f nabývá maxima na množině $M_1 = \{(x, y) \in \overline{M} \colon x + y \leq T\}$ (tato množina je kompaktní – jde o uzavřený trojúhelník) a toto maximum je zároveň maximem na $\overline{M}$, protože pro $(x, y) \in \overline{M} \setminus M_1$ je $f(x, y) < f(1, 1)$.

Protože f na M extrémy nemá, musí bod maxima ležet na hranici. Ta se skládá z bodu $(0, 0)$ (kde je minimum) a ze dvou polopřímek $H_1 = \{(x, 0) \colon x > 0\}$ a $H_2 = \{(O, y) \colon y > 0\}$.

Má-li f maximum v nějakém bodě H_1, pak má v tomto bodě maximum i vzhledem k H_1. Na H_1 má f tvar $f(x, 0) = 7xe^{-x}$. Můžeme ji tedy vyšetřovat jako funkci jedné proměnné. Derivace je rovna $7(1 - y)e^{-x}$, je nulová právě pro $x = 1$. Přitom $f(1, 0) = 7/e$.

Podobně na H_2 má f tvar $f(0, y) = 10ye^{-y}$. Derivace této funkce proměnné y je $10(1 - y)e^{-y}$, a to je rovno 0 právě pro $y = 1$. Přitom $f(0, 1) = 10/e$.

Z právě provedených výpočtů a výše uvedeného zdůvodnění plyne, že funkce f nabývá na $\overline{M}$ maxima $10/e$ v bodě $(0, 1)$. Proto $\sup f(M) = 10/e$, a máme tedy

$f(M) = (0, 10/e)$

(i) $x = 0$ a $y = 0$ – tím dostaneme již známý bod minima $(0, 0)$.

(ii) $x = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – odtud dostaneme dva body $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. V obou je hodnota f rovna $\frac{7}{2e}$.

(iii) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $y = 0$ – odtud dostaneme dva body $(1/\sqrt{5}, 0)$ a $(-1/\sqrt{5}, 0)$. V obou je hodnota f rovna $\frac{1}{5e}$.

(iv) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – tento případ však nemůže nastat, protože výraz $x^2 + 7y^2$ nemůže být zároveň $1/5$ i $7/2$.

Nyní porovnáním výsledků dostaneme, že funkce f nabývá maxima $\frac{7}{2e}$ v bodech $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. ■

§70. Pokud funkce extrémů nenabývá, nebo alespoň nevíme předem, zda nabývá, hledáme supremum a infimum. Přitom nám někdy může pomoci následující pozorování.

Nechť funkce f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ *a* $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Toto se hodí například v případě, že množina M je omezená. Pak totiž její uzávěr je kompaktní, a je-li f na $\overline{M}$ spojitá, pak můžeme na $\overline{M}$ najít extrémy, a tím určíme supremum a infimum na M.

2a

<u>Příklad</u> Najděte supremum a infimum funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$. Existuje minimum a maximum funkce f na M?

Řešení. Množina M je otevřená a f má všude na M parciální derivace. Pokud tedy má f extrém v nějakém bodě M, musí v něm být parciální derivace prvního řádu nulové, tj. $\cos x = 0$ a $\cos y = 0$. To splňují body tvaru $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Žádný z těchto bodů ovšem v M neleží. Proto f na M extrémů nenabývá.

Nicméně funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a $\overline{M}$ je kompaktní (M je otevřený kruh o středu 0 a poloměru $\pi/2$, $\overline{M}$ je příslušný uzavřený kruh). Proto f nabývá extrémů na $\overline{M}$. Protože v M extrémy nemá, nabývá jich na hranici, tj. na množině $\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = \pi^2/4\}$. (Jelikož M je otevřená, je $\partial M = \overline{M} \setminus M$.) To je kružnice, a tedy bychom ji mohli parametrizovat jako v §67. Tento postup necháváme na čtenáři, zde použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů z §68.

Funkce $g(x, y) = x^2 + y^2 - \pi^2/4$ je třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, její parciální derivace jsou $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$. Obě jsou nulové pouze v bodě $(0, 0)$, který neleží v ∂M. Proto, má-li funkce f v nějakém bodě ∂M lokální extrém (vzhledem k ∂M), existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, pro které platí:

$$\cos x + \lambda \cdot 2x = 0,$$
$$\cos y + \lambda \cdot 2y = 0,$$
$$x^2 + y^2 - \pi^2/4 = 0.$$

Z prvních dvou rovnic dostáváme, že $y \cos x - x \cos y = 0$. Všimněme si, že nemůže být $x = 0$ ani $y = 0$. Jinak by totiž nebyla splněna první nebo druhá rovnice. Proto rovnici můžeme upravit na tvar $\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos y}{y}$. Přitom $(\frac{\cos t}{t})' = \frac{-(\sin t)\cdot t - \cos t}{t^2}$. Proto je funkce $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ klesající na $(0, \pi/2]$ i na $[-\pi/2, 0)$. Protože navíc pro $t \in (0, \pi/2]$ je $\frac{\cos t}{t} > 0$ a pro $x \in [-\pi/2, 0)$ je $\frac{\cos t}{t} < 0$, je tato funkce prostá na $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$. Jelikož $(x, y) \in \partial M$ implikuje $x, y \in [-\pi/2, \pi/2]$, z rovnosti $\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos y}{y}$ plyne $x = y$. Takové body jsou v ∂M dva: $(\pi/\sqrt{8}, \pi/\sqrt{8})$ a $(-\pi/\sqrt{8}, -\pi/\sqrt{8})$. V prvním z nich nabývá f na $\overline{M}$ maxima, ve druhém minima.

Proto, podle tvrzení na počátku paragrafu, je $\sup f(M) = 2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}}$ a $\inf f(M) = -2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}}$. ■

<u>Příklad</u> Najděte $f(M)$, je-li $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y > 0\}$ a $f(x, y) = (7x + 10y)e^{-x-y}$.

Řešení. Protože funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a množina M je konvexní, a tedy souvislá, je $f(M)$ souvislá podmnožina $\mathbb{R}$. Proto je $f(M)$ interval. Stačí tudíž určit supremum a infimum funkce f na M a zjistit, zda f těchto hodnot nabývá.

Množina M je otevřená a f má všude parciální derivace. Má-li tedy f v nějakém bodě M extrém, má tam parciální derivace nulové. Necháváme čtenáři ověřit, že takový bod neexistuje. Proto f nenabývá extrémů (a tedy $f(M)$ je otevřený interval).

Podle tvrzení na počátku paragrafu je $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Přitom $\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0\}$.

Postupujme podobně jako v příkladu v §69. Je $f(0, 0) = 0$ a $f \geq 0$ na $\overline{M}$. Tudíž $\inf f(M) = 0$.

Abychom nalezli supremum f na M, uvědomme si nejprve, že f nabývá na $\overline{M}$ maxima. Pro $(x, y) \in \overline{M}$ platí totiž $f(x, y) \leq 10(x + y)e^{-x-y}$. Protože platí $\lim_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$, existuje $T > 0$ takové, že pro $t \geq T$ je $te^{-t} < \frac{1}{10} f(1, 1)$. Pak funkce f nabývá maxima na množině $M_1 = \{(x, y) \in \overline{M} \colon x + y \leq T\}$ (tato množina je kompaktní – jde o uzavřený trojúhelník) a toto maximum je zároveň maximem na $\overline{M}$, protože pro $(x, y) \in \overline{M} \setminus M_1$ je $f(x, y) < f(1, 1)$.

Protože f na M extrémy nemá, musí bod maxima ležet na hranici. Ta se skládá z bodu $(0, 0)$ (kde je minimum) a ze dvou polopřímek $H_1 = \{(x, 0) \colon x > 0\}$ a $H_2 = \{(O, y) \colon y > 0\}$.

Má-li f maximum v nějakém bodě H_1, pak má v tomto bodě maximum i vzhledem k H_1. Na H_1 má f tvar $f(x, 0) = 7xe^{-x}$. Můžeme ji tedy vyšetřovat jako funkci jedné proměnné. Derivace je rovna $7(1 - y)e^{-x}$, je nulová právě pro $x = 1$. Přitom $f(1, 0) = 7/e$.

Podobně na H_2 má f tvar $f(0, y) = 10ye^{-y}$. Derivace této funkce proměnné y je $10(1 - y)e^{-y}$, a to je rovno 0 právě pro $y = 1$. Přitom $f(0, 1) = 10/e$.

Z právě provedených výpočtů a výše uvedeného zdůvodnění plyne, že funkce f nabývá na $\overline{M}$ maxima $10/e$ v bodě $(0, 1)$. Proto $\sup f(M) = 10/e$, a máme tedy

2b (c) • $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z, \qquad \nabla f(x,y,z) = (\cos x \sin y \sin z, \sin x \cos y \sin z, \sin x \sin y \cos z)$
- $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = \frac{\pi}{2},\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$
- $g(x,y,z) = x+y+z-\frac{\pi}{2}, \qquad \nabla g(x,y,z) = (1,1,1)$
- $G = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x>0,\ y>0,\ z>0\}$ pro M a $f,g \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Ze zadání množiny M si všimneme, že musí platit $x,y,z \in (0,\frac{\pi}{2})$. Tudíž máme, že množina M je omezená, ale není uzavřená. Její uzávěr $\overline{M} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = \frac{\pi}{2},\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ už je ale uzavřený i omezený a f je spojitá na $\overline{M}$, takže se na něm bude nabývat maxima a minima. Nejprve ale zjistíme podezřelé body na M.

Podle věty o multiplikátoru pro bod extrému musí platit buďto

$$\nabla g(x,y,z) = (1,1,1) = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad [x,y,z] \in \emptyset,$$

nebo že existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující následující sadu rovnic.

$$\begin{aligned} \cos x \sin y \sin z + \lambda x &= 0 \\ \sin x \cos y \sin z + \lambda y &= 0 \\ \sin x \sin y \cos z + \lambda z &= 0 \\ x+y+z &= \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od první a třetí od první dojdeme k soustavě

$$\begin{aligned} \sin z(\cos x \sin y - \sin x \cos y) &= \sin z \sin(y-x) = 0 \\ \sin y(\cos x \sin z - \sin x \cos z) &= \sin y \sin(z-x) = 0 \\ x+y+z &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Analýzou jednotlivých možností a pomocí odvozeného $x,y,z \in (0,\frac{\pi}{2}]$ snadno dojdeme k jedinému výsledku

$$[x,y,z] = [\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{6}]$$

Dosazením do funkce máme:

$$f([\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{6}]) = \tfrac{1}{8}$$

Navíc očividně $[x,y,z] \in \overline{M} \setminus M$ splňují $f([x,y,z]) = 0$ a $[x,y,z] \in M$ splňují $f([x,y,z]) > 0$, a tedy na $\overline{M}$ je maximum $\frac{1}{8}$ a minimum 0. Z vlastnosti uzávěru ale také platí, že pro $[x,y,z] \in \overline{M} \setminus M$ existuje posloupnost $[x_n,y_n,z_n] \in M$ splňující $[x_n,y_n,z_n] \to [x,y,z]$, což ze spojitosti funkce f na $\overline{M}$ dává $f([x_n,y_n,z_n]) \to f([x,y,z]) = 0$.

Maximum f na M je tedy $\frac{1}{8}$ a to v bodě $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$, zatímco infimum je 0 a na M se ho nenabývá.

Poznánka: Příkladem posloupnosti výše může být třeba

$$[x_n,y_n,z_n] = [\tfrac{1}{n},\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2n},\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2n}] \to [0,\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}].$$

(d) • $f(x,y,z) = xy^2z^3, \qquad \nabla f(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$
- $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z = a,\ x>0,\ y>0\}$
- $g(x,y,z) = x+2y+3z-a, \qquad \nabla g(x,y,z) = (1,2,3)$
- $G = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x>0,\ y>0\}$ pro M a $f,g \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Množina M není uzavřená ani omezená, ale uzávěr $\overline{M} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z = a,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ už je alespoň uzavřený Nejprve zjistíme podezřelé body na M.

Podle věty o multiplikátoru pro bod extrému musí platit buďto

$$\nabla g(x,y,z) = (1,2,3) = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad [x,y,z] \in \emptyset,$$

nebo že existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující následující sadu rovnic.

$$\begin{aligned} y^2z^3 + 1\lambda &= 0 \\ 2xyz^3 + 2\lambda &= 0 \\ 3xy^2z^2 + 3\lambda &= 0 \\ x+2y+3z &= a \end{aligned}$$

K vyřešení soustavy rovnic podmínky „nebo“ využijeme toho, že z první rovnice musí buď $\lambda = 0$ nebo $4(x^2+y^2)x - Ky = 0$. Lambda být nula nemůže kvůli druhé rovnici, takže musí platit $(x^2+y^2)x - Ky = 0$. Díky pozorování ($\triangle$) a tomu, že bod $[0,0]$ už je mezi podezřelými se můžeme omezit na $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Díky tomu můžeme bez problémů z $4(x^2+y^2)x - Ky = 0$ vyjádřit (x^2+y^2) a dosadit do třetí rovnice. Po úpravách dojdeme k $y = \frac{16x^3}{K}$, což opět dosadíme do třetí rovnice a dořešením dostávám podezřelé body:

$$[x,y] = [\tfrac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}], [-\tfrac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, -\tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]$$

Dosazením všech podezřelých bodů do funkce máme:

$$f([0,0]) = 0, \qquad f([\tfrac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]) = \tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}, \qquad f([-\tfrac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, -\tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]) = -\tfrac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}$$

Z předchozích úvah je jasné, že maximum f na M je $\frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}$ a to v bodě $[\frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]$ a minimum $-\frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}$ a to v bodě $[\frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}]$.

2. • $f(x,y,z) = x - y + 2z, \qquad \nabla f(x,y,z) = (1,-1,2)$

2c • $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+z^2 < y\}$

Množina M je očividně omezená, ale není uzavřená. Její uzávěr $\overline{M} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+z^2 \leq y\}$ už je ale uzavřený i omezený a f je spojitá na $\overline{M}$, takže se na něm bude nabývat maxima a minima. Úlohu si rozdělíme na dva kusy

- $M_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+z^2 < y\}$
  $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2, \qquad \nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z)$
  $G = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 < y\}$ pro M_1 a $f,g \in C^1(\mathbb{R}^3)$
  Podle věty o multiplikátoru pro bod extrému musí platit buďto

  $$\nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z) = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad [x,y,z] = [0,0,0] \notin M_1,$$

  nebo že existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující následující sadu rovnic.

  $$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ -1 + 2\lambda y &= 0 \\ 2 + 2\lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 2 \end{aligned}$$

  Vyřešením třeba pomocí vyjádření x, y a z z prvních tři rovnic a dosazením do poslední dostáváme řešení:

  $$[x,y,z] = [-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{2}{\sqrt{3}}] \notin M_1 \quad \text{a} \quad [x,y,z] = [\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{2}{\sqrt{3}}] \notin M_1$$

  Na M_1 tedy žádné podezřelé body nejsou.
- $M_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+z^2 = y\}$
  $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2, \qquad \nabla g_1(x,y,z) = (2x,2y,2z)$
  $g_2(x,y,z) = x^2+z^2-y, \qquad \nabla g_2(x,y,z) = (2x,-1,2z)$
  $G = \mathbb{R}^3$ pro M_2 a $f,g_1,g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$
  Podle věty o multiplikátoru pro bod extrému musí platit buďto

  $$\nabla g_1(x,y,z) = (2x,2y,2z) \text{ je násobkem } \nabla g_2(x,y,z) = (2x,1,2z),$$

  nebo že existují $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ splňující následující sadu rovnic.

  $$\begin{aligned} 1 + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x &= 0 \\ -1 + 2\lambda_1 y - \lambda_2 &= 0 \\ 2 + 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 2 \\ x^2+z^2 &= y \end{aligned}$$

Z podmínky lineární závislosti dostáváme body

$$[x, y, z] = [0, -\tfrac{1}{2a}, 0],\ a \in \mathbb{R},\ \text{a}\ [x, y, z] = [b, -\tfrac{1}{2}, c],\ b, c \in \mathbb{R}.$$

Žádný z těchto bodu ale nesplňuje $g_1([x, y, z]) = 0 = g_2(x, y, z)$, takže nepřipadají v úvahu jako podezřelé.

Nyní k řešení soustavy. Dosazením poslední rovnice v soustavě do předposlední rovnice dostáváme $y^2 + y = 2 \Rightarrow y = 1, -2$. Z rovnic je jasné, že $x \neq 0$ a $z \neq 0$, a proto můžeme z první a třetí rovnice vyjádřit $(2\lambda_1 + 2\lambda_2)$ a dát je do rovnosti. Z toho dostaneme $z = 2x$. Nyní už snadno dosazením obou poznatků do čtvrté rovnice dostáváme řešení:

$$[x, y, z] = [\tfrac{1}{\sqrt{5}}, 1, \tfrac{2}{\sqrt{5}}] \quad \text{a} \quad [-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}]$$

Dosazením do funkce máme:

$$f([\tfrac{1}{\sqrt{5}}, 1, \tfrac{2}{\sqrt{5}}]) = \sqrt{5} - 1 \quad \text{a} \quad f([-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}]) = -\sqrt{5} - 1$$

Je tedy jasné, že minimum f na M_2 je $-\sqrt{5} - 1$ a to v bodě $[-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\frac{2}{\sqrt{5}}]$ a maximum $\sqrt{5} - 1$ a to v bodě $[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]$.

Celkem tedy na uzávěru $\overline{M}$ je maximum $\sqrt{5} - 1$ a minimum $-\sqrt{5} - 1$ a obě se nabývají na $\overline{M} \setminus M$, a tedy jsou pro množinu M supremem a infimem, kterých se nenabývá. To plyne z vlastnosti uzávěru a spojitosti funkce na uzávěru, neboť z vlastnosti uzávěru platí, že pro $[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]$ existuje posloupnost $[x_n, y_n, z_n] \in M$, která k němu konverguje a ze spojitosti funkce na uzávěru $f([\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]) \to \sqrt{5} - 1$. Pro infimum by se to udělalo obdobně. Závěr tedy je, že funkce f má na M infimum $-\sqrt{5} - 1$ a supremum $\sqrt{5} - 1$ a ani jednoho se nenabývá.

2a

Řešení:

1. $f(x,y,z) := x + y + z$, $H = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x < 0\}$. Je vhodné si uvědomit, že H je průnik dvou koulí. Druhou podmínku z její definice si totiž můžeme přepsat jako $(x-1)^2 + y^2 + z^2 < 1$.

   Množina H není kompaktní, tedy se na ní extrémů nabývat nemusí. Nicméně je omezená, a tedy má smysl vyšetřovat extrémy funkce f na kompaktní množině

$$\overline{H} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x \leq 0\}$$

   Funkce f je na ní spojitá, extrémů se tam tedy nabývá, a tedy stačí hledat podezřelé body. Označme $g_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a $g_2(x,y,z) := x^2 - 2x + y^2 + z^2$, a spočítejme si gradienty:

$$\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

   Množinu $\overline{H}$ si rozdělíme na čtyři části. Mlčky vlastně využíváme Tvrzení 6 ve verzi pro maxima.

   - $\operatorname{int}\overline{H} = H$ (toto obecně platit nemusí, ale v tomto konkrétním případě to platí). Hledáme lokální extrémy, tedy potřebujeme gradient

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

     Tedy ∇f se nule nikdy nerovná, a tedy na H funkce f žádný lokální (a tedy ani globální) extrém nemá.
   - $[x,y,z] \in \overline{H}\colon\ g_1(x,y,z) = 0$. Tady máme jednu vazbu, použijeme Větu 1.
     - Hledáme nejprve body, kde $\nabla g_1 = 0$, což je jen bod $[0,0,0]$, ale ten nenáleží do množiny $\{g_1 = 0\}$ (množiny bodů, ve kterých je funkce g_1 nulová).
     - Tedy existuje λ taková, že

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda 2x, \\ 1 &= \lambda 2y, \\ 1 &= \lambda 2z. \end{aligned}$$

       Zjevně $\lambda \neq 0$, tedy $x = y = z$, a tedy z rovnice $g_1(x,x,x) = 0$ máme první dvojici podezřelých bodů $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Nicméně jen jeden z nich náleží do množiny $\overline{H}$, a sice

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

   - $[x,y,z] \in \overline{H}\colon\ g_2(x,y,z) = 0$. Opět jedna vazba, opět Lagrange.
     - Hledáme nejprve body, kde $\nabla g_2 = 0$, což je jen bod $[1,0,0]$, ale ten nenáleží do množiny $\{g_2 = 0\}$.

– Tedy existuje λ taková, že

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda(2x-2), \\ 1 &= \lambda 2y, \\ 1 &= \lambda 2z. \end{aligned}$$

opět vidíme, že $\lambda \neq 0$, tedy $y = z = \frac{1}{2\lambda}$. A první rovnici můžeme podělit 2λ, dostaneme $\frac{1}{2\lambda} = x - 1$, tedy $y = x - 1$. Dosadíme $x = y + 1$ do rovnice $g_2 = 0$, dostaneme

$$(y+1-1)^2 + y^2 + y^2 = 1,$$

tedy máme další dvojici podezřelých bodů $\left[\frac{\pm 1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, z nichž jen jeden je v množině $\overline{H}$:

$$\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

- A konečně množina $[x, y, z] \in \overline{H}: \; g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$. Tady máme vazby dvě:
  - ∇g_1 a ∇g_2 jsou lineárně závislé, neboli:
    * $\nabla g_1 = 0$, pak $x = y = z = 0$, ale $g_1(0, 0, 0) = -1 \neq 0$, nebo
    * Existuje λ tak, že $\nabla g_2 = \lambda \nabla g_1$, tedy

$$\begin{aligned} 2\lambda x &= 2x - 2, \\ 2\lambda y &= 2y, \\ 2\lambda z &= 2z. \end{aligned}$$

Po úpravě máme

$$\begin{aligned} (2\lambda - 2)x &= -2, \\ (2\lambda - 2)y &= 0, \\ (2\lambda - 2)z &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme, že $(2\lambda - 2) \neq 0$, tedy tím ve druhé a třetí rovnici můžeme podělit a dostaneme $y = z = 0$. Pak ze vztahů $g_1 = g_2 = 0$ hravě zjistíme, že zde nemáme žádná řešení.

  - Nebo existují λ_1 a λ_2 tak, že

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x - 2\lambda_2 = 2(\lambda_1 + \lambda_2)x - 2\lambda_2, \\ 1 &= 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 2(\lambda_1 + \lambda_2)y, \\ 1 &= 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z = 2(\lambda_1 + \lambda_2)z, \\ 0 &= x^2 + y^2 + z^2 - 1, \\ 0 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice je vidět, že $2(\lambda_1 + \lambda_2) \neq 0$, tedy tím můžeme rovnice podělit, a tedy $y = z$. Odečtením 5. rovnice od 4. dostaneme, že $x = \frac{1}{2}$. A ze čtvrté rovnice tedy

$$\frac{1}{4} + 2y^2 = 1,$$

a tedy $y = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$. Máme tedy dvojici podezřelých bodů

$$\left[\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \pm\sqrt{\frac{3}{8}}\right].$$

A nyní zbývá už jen dosazení:

$$f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right) = \sqrt{3} = S \doteq 1.7321,$$
$$f\left(\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right) = 1 - \sqrt{3} = I \doteq -0.73205,$$
$$f\left(\left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}\right]\right) \doteq 1.7247,$$
$$f\left(\left[\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{8}}, -\sqrt{\frac{3}{8}}\right]\right) \doteq -0.72474.$$

Tedy, jelikož všechny tyto body nejsou v množině H a díky Tvrzení 3 víme, že funkce f na H minima ani maxima nenabývá.

2c

2. $f(x, y) := -x^4 - y^4$, $H = \{x^2 + 2y^2 > 1\}$. Je vidět, že infimum je $I = -\infty$, stačí uvážit $x = y \to \infty$, pak $f(x, x) \to -\infty$.

   Množina není ani omezená, ani uzavřená, extrémů se tedy nabývat nemusí. Tedy, abychom mohli vyšetřit jaké bude supremum (nebo snad maximum), tak je třeba si množinu omezit a uzavřít. Je vidět, že čím blíže jsme k nule, tím vyšší bude hodnota funkce. Tedy je rozumné zvolit třeba množinu

   $$K := \{x^4 + y^4 \leq 42,\ x^2 + 2y^2 \geq 1\},$$

   což je jakési „mezikruží“. K už kompaktní je, a tedy funkce f (která je spojitá) na K maxima nabývá. (Minima taky, ale již víme, že to je nám jedno.) Navíc

   $$\sup_{[x,y]\in H} f(x, y) = \sup_{[x,y]\in K} f(x, y) = \max_{[x,y]\in K} f(x, y).$$

   Toto je skoro zřejmé, nicméně celé zdůvodnění si žádá několik kroků. V písemce toto není třeba probírat tak podrobně, ale je fajn si uvědomit, jak by se to formálně zdůvodnilo.

   - $\overline{\operatorname{int} K} = \overline{\{x^4 + y^4 < 42,\ x^2 + 2y^2 > 1\}} = K$, tedy z Tvrzení 3 plyne, že

     $$\sup_{[x,y]\in \operatorname{int} K} f(x, y) = \sup_{[x,y]\in K} f(x, y). \tag{1}$$

   - $$[x, y] \in H \setminus \operatorname{int} K = \{x^4 + y^4 \geq 42\} \Rightarrow f(x, y) \leq -42.$$

     Tedy

     $$\sup_{[x,y]\in H\setminus \operatorname{int} K} f(x, y) \leq -42.$$

- $[1,1] \in \operatorname{int} K$, tedy

$$\sup_{[x,y]\in \operatorname{int} K} f(x,y) \geq f(1,1) = -2 > -42 = \sup_{[x,y]\in H\setminus \operatorname{int} K} f(x,y). \tag{2}$$

- $H = (H \setminus \operatorname{int} K) \cup (\operatorname{int} K)$. Tedy díky Tvrzení 6 a (2) máme

$$\sup_{[x,y]\in H} f(x,y) = \max\left\{\sup_{[x,y]\in H\setminus \operatorname{int} K} f(x,y), \sup_{[x,y]\in \operatorname{int} K} f(x,y)\right\} = \sup_{[x,y]\in \operatorname{int} K} f(x,y). \tag{3}$$

- V posledním kroku jen dáme dohromady (1) a (3) a dostaneme výsledek. Jelikož je K kompaktní a f spojitá, je supremum a maximum to samé.

Pro zjištění suprema na množině H tedy hledáme maximum na množině K, a body kde se ho nabývá. Budou-li tyto body v množině H, pak jsme na ní našli maximum. Pokud ne, pak se maxima na množině H nenabývá a máme jen supremum.

Na vnitřku množiny K funkce extrém nemá, neboť $\nabla f(x,y) = (-4x^3, -4y^3)^\top$, tedy $\nabla f = 0$ pouze když $x = y = 0$, což do množiny K nenáleží.

Hranice má dvě části:

- $\{x^4 + y^4 = 42\}$. Tam být maximum nemůže, neboť $f(1,1) = -2$, a pro $[x,y] \in \{x^4 + y^4 = 42\}$ platí, že $f([x,y]) = -42$.
- $x^2 + 2y^2 = 1$. Tedy konečně přichází na řadu Lagreangeovy multiplikátory. Označme $g(x,y) := x^2 + 2y^2 - 1$. Pak $\nabla g(x,y) = (2x, 4y)^\top$. Tento gradient je nulový pouze pro $x = y = 0$, což v množině K není. Tedy z Věty 1 plyne, že existuje λ tak, aby
$$\begin{pmatrix} -4x^3 \\ -4y^3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}.$$
Tedy buď je $x = 0$ ($g(x,y) = 0$, tedy $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$), nebo $y = 0$ (pak $x = \pm 1$). A nebo mohu vydělit první rovnici x, druhou y a dostaneme, že $4\lambda = 2(-4x^2) = -4y^2$. Tedy $2x^2 = y^2$, a z rovnice $g(x,y) = 0$ dostáváme 4 řešení: $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$. Dosazení:

$$f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}, \tag{4}$$

$$f\left(\pm 1, 0\right) = -1, \tag{5}$$

$$f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]\right) = -\frac{1}{5}, \tag{6}$$

$$f\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]\right) = -\frac{1}{5}. \tag{7}$$

Jelikož body $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$ v množině Hneleží, dostáváme, že maximum neexistuje a $S = -\frac{1}{5}$.

3 • A_1, A_2 řídké: $X \setminus \overline{A_i}$ husté

pro $A_1 \cup A_2$ máme

$$X \setminus \left(\overline{A_1 \cup A_2}\right) = \underbrace{\underbrace{X \setminus \overline{A_1}}_{\text{ot. husté}} \cap \underbrace{X \setminus \overline{A_2}}_{\text{ot. husté}}}_{\bullet}$$

Věta: (ot. husté) $\cap$ (husté) = husté

$\rightarrow$ • husté ✓

• pro 3 množiny uvažujme $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$

• tedy pro n množin indukcí