13. cvičení - Funkce více proměnných - Extrémy a Nekompaktní množiny

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Poznámka 1. Nechť f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Poznámka 2. Nechť K je neprázdní kompaktní množina v metrickém (pod)prostoru X. Nechť navíc $\operatorname{int} K \subset X$. Nechť funkce f je spojitá na K a nechť existuje $x_0 \in \operatorname{int} K$ tak, že

$$x \in \partial K \cup (X \setminus K) \implies f(x) > f(x_0) \qquad (\text{resp.} f(x) < f(x_0)).$$

Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\operatorname{int} K$.

Globální extrémy:

1. Postupujeme jako u lokálních extrémů - tím získáme lokální maxima nebo minima. Pokud je funkce diferencovatelná, tak jinde extrémy být nemohou.
2. Odhadneme limity v krajích definičního oboru. Např. jak se funkce chová na přímkách $y = 0$, $x = 0$.
3. Pokud to vypadá, že funkce globální extrémy nemá (např. jde někde do nekonečna), tak za pomoci limit najdeme bod, který má vyšší hodnotu, než naše lok. maximum (minimum analogicky).
4. Pokud to vypadá, že v místech lok. extrémů jsou i globální, tak:
   (a) Najdeme kompakt, který obsahuje tyto podezřelé body. Spojitá funkce na kompaktu musí nabývat extrémů.
   (b) Ukážeme, že mimo kompakt je funkce menší než maximum (a větší než minimum). Tady pomůže vhodná volba kompaktu, znalost limit a nějaké ty obvyklé odhady.

Algoritmus: Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina uzavřená, tak odůvodníme, že spojitá funkce na kpt. nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
   (a) na vnitřku množiny jen v místech s nulovými derivacemi (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
   (b) v bodech vnitřku, kde neexistuje derivace;
   (c) na hranici: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a výraz zjednodušit.
   (d) na hranici hranice: krajní body, hroty trojúhelníku atp.
3. Všechny podezřelé body sepíšeme a porovnáme jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.
4. Pokud množina není uzavřená, tak ji prve uzavřeme a vyšetříme jako kompakt. Pokud je extrém na její hranici (mimo množinu), tak funkce tento extrém nemá - ale bude to její sup/inf.

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):
   (a) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$, $M = [0, \infty)^2$.
   Hint: $x \geq 3, y \leq 3$: $f(x, y) \geq x^3 - 3xy \geq 2x(3 - y) \geq 0$
   Hint: $x \geq 3, y \geq 3$: $f(x, y) \geq 3(x^2 - xy + y^2) = 3((x - y)^2 + xy) \leq 0$

   (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
   Hint: Jak se chová funkce te^{-t}?
   (c) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2-2y^2}$
   Hint: Lze se nějakými odhady dostat k funkci te^{-t}?
   (d) $f(x, y) = 3x + \dfrac{4y}{x^2} + \dfrac{27}{y^3}$, $M = (0, \infty)^2$
   (e) $f(x, y) = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}$, na $M = (0, \infty)^3$
   (f) $f(x, y) = (7x + 10y)e^{-x-y}$, $x > 0$, $y > 0$.
2. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):
   (a) $f(x, y) = \sin x + \sin y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$
   (b) $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
   (c) $f(x, y) = x - y + 2z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + z^2 < y\}$
   (d) $f(x, y) = x + y + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2x < 0\}$
   (e) $f(x, y) = -x^4 - y^4$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 > 1\}$
3. Ukažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina. Je to pravda pro spočetná sjednocení?
   Množina $A \subset X$ je řídká v (X, ρ), jestliže $X \setminus \overline{A}$ je hustá v X.
   Množina $B \subset X$ je hustá v (X, ρ), jestliže $\overline{B} = X$.