12. cvičení - Funkce více proměnných - Lagrangeovy multiplikátory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Lagrangeovy multiplikátory)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G, g(x, y) = 0\}$ a $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$
2. existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$

Věta 2 (Lagrangeovy multiplikátory 2)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$, $m < n$, $M = \{\boldsymbol{z} \in G, g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \dots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$ a $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. vektory $\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}), \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}})$ jsou lineárně závislé,

   Jeden vektor je lineárně závislý, jestliže je nulový, dva vektory jsou lineárně závislé, jestliže jeden je násobek druhého.

2. existují $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ splňující
$$\nabla f(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) = \mathbf{0}.$$

Poznámka 3. Nechť f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Poznámka 4. Nechť K je neprázdní kompaktní množina v metrickém (pod)prostoru X. Nechť navíc $\operatorname{int} K \subset X$. Nechť funkce f je spojitá na K a nechť existuje $x_0 \in \operatorname{int} K$ tak, že
$$x \in \partial K \cup (X \setminus K) \implies f(x) > f(x_0) \qquad (\text{resp.} f(x) < f(x_0)).$$
Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\operatorname{int} K$.

Algoritmus

Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina uzavřená, tak odůvodníme, že spojitá funkce na kpt. nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
   (a) na vnitřku množiny jen v místech s nulovými derivacemi (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
   (b) v bodech vnitřku, kde neexistuje derivace;
   (c) na hranici: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a získat funkci 1 proměnné.
   (d) na hranici hranice: krajní body, hroty trojúhelníku atp.
3. Všechny podezřelé body sepíšeme a porovnáme jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.
4. Pokud množina není uzavřená, tak ji prve uzavřeme a vyšetříme jako kompakt. Pokud je extrém na její hranici (mimo množinu), tak funkce tento extrém nemá - ale bude to její sup/inf.

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y,z) = x - 2y - 2z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
   (b) $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
   (c) $f(x,y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$
   (d) $f(x,y,z) = x - y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$
   (e) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$
   (f) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 2x + 6y = 20\}$
   (g) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

Zkouškové příklady

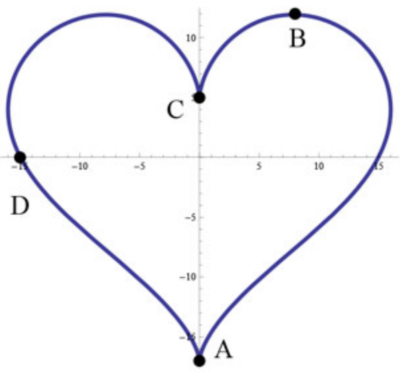
2. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y,z) = xy + yz$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$
   (b) $f(x,y,z) = z + e^{xy}$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$
3. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y) = x^4 y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
   (b) $f(x,y) = 2x + 4y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
   (c) $f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2 + y^2 + xy)$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$
   (d) $f(x,y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$
4. Určete maximální možný objem kvádru, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině $M = \{[x,y,z], x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z = 2.\}$

Bonusové příklady

5. Farmář a fařmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?
   (a) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + y - 100$
   (b) $f(x, y) = 2x + 2y - 100$, $g(x, y) = xy$
   (c) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 100$
   (d) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy - 100$

Source 1: https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/

6. Ve kterém z bodů A, B, C, D se nachází minimum funkce $f(x, y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml