1a $x^2 + (y-1)^2$

Řešení. Podotkněme, že je evidentní, že funkce f je nezáporná a nuly nabývá pouze v bodě $(0,1)$, kde tedy nabývá globálního minima. Pojďme nicméně vyšetřit existenci extrémů standardním postupem. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad 2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0,1)$, kde, jak už jsme zmínili funkce zřejmě nabývá globálního minima. Nemusíme tedy vyšetřovat definitnost matice druhého diferenciálu (navíc bychom tak dostali pouze informaci, že jde o lokální minimum). □

1b **Úloha I.64.** $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad -2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0,1)$. Oproti předchozí úloze není automaticky vidět, zda se v tomto bodě nabývá extrému. Vyšetříme tedy definitnost matice druhého diferenciálu, tj. matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Určeme tedy nejprve druhé parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Matice druhého diferenciálu (v bodě $(0,1)$) má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a její hlavní determinanty jsou $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -4 < 0$. Protože druhý hlavní determinant (tedy determinant celé matice) je záporný, je matice druhého diferenciálu indefitní, extrému se tedy v bodě $(0,1)$ nenabývá. Funkce f tedy v žádném bodě nemá lokální extrém.[5] □

Úloha I.65. $f(x,y) = (x-y+1)^2$

Řešení. Je vidět, že funkce f je nezáporná. Ve všech bodech přímky $x - y + 1 = 0$ tedy nabývá globálního minima. Přesvědčíme se, že jiné extrémy funkce f nemá. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y+1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -2(x-y+1).$$

Je zjevné, že obě parciální derivace jsou nulové právě v bodech zmíněné přímky. V jiných bodech se tedy extrému nenabývá. □

Úloha I.66. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

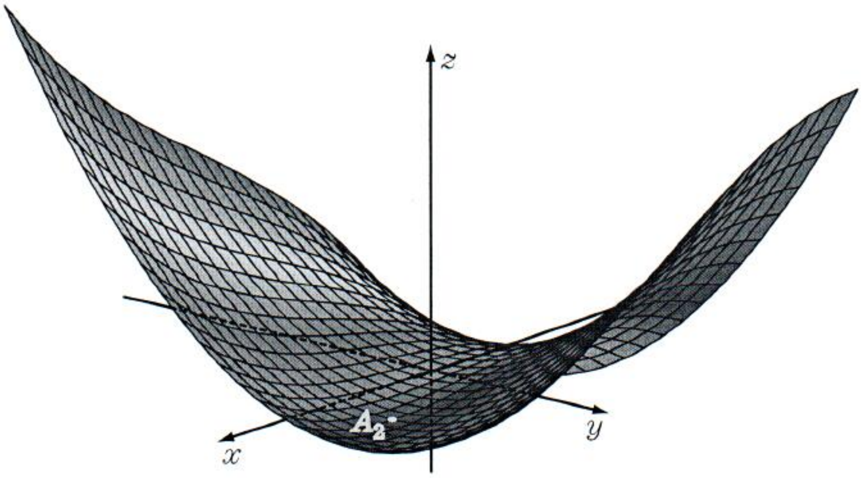
Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Její parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y + 1.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 2x - y - 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

[5]) Úlohu lze opět řešit i pomocí úvah. Pokud $x \neq 0$, pak malým zvětšením absolutní hodnoty x se funkční hodnota f zvětší, zmenšením zmenší, takže v bodech, kde $x \neq 0$ se nemůže nabývat extrému. Z podobného důvodu nepřichází z hlediska extrému jiná možnost, než $y = 1$. Nicméně ani v bodě $(0,1)$ se nemůže nabývat extrému. Malým posunem hodnoty y se funkce f dostane do záporných, zatímco malým posunem hodnoty x do kladných hodnot.



Obr. 6.1.2

1c

Příklad 6.1.2. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2).$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace prvého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2x)(2y^2 + x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}2x = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2y)(2y^2 + x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}4y = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 2).$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dostaneme tak rovnice pro stacionární body funkce f,

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 1) = 0,$$
$$-2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 2) = 0.$$

3. Rovnice pro stacionární body vyřešíme. Výraz $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je vždy různý od nuly pro libovolné x, y, můžeme jím proto obě rovnice vykrátit,

$$x(2y^2 + x^2 - 1) = 0,$$
$$y(2y^2 + x^2 - 2) = 0.$$

Položíme-li v první rovnici $x = 0$, dostáváme ze druhé rovnice $y(2y^2 - 2) = 0$ řešení $y = 0$, $y = \pm 1$. Získali jsem tři stacionární body $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ a $A_3 = [0, -1]$.

Položíme-li ve druhé rovnici $y = 0$, pak z první rovnice $x(x^2 - 1) = 0$ plyne řešení ve tvaru $x = 0$, $x = \pm 1$. Stacionární bod $A_1 = [0, 0]$ jsme již vypočítali, takže na základě předpokladu $y = 0$ jsme získali dva nové stacionární body, bod $A_4 = [1, 0]$ a $A_5 = [-1, 0]$.

Zbývá ještě prověřit možnost, že $x \neq 0$, $y \neq 0$. V tomto případě řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2y^2 + x^2 - 1 &= 0, \\ 2y^2 + x^2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Jestliže obě rovnice od sebe odečteme, dostáváme rovnici $1 = 0$, toto ale neplatí pro žádné x, y. Soustava nemá za tohoto předpokladu řešení. Žádný nový stacionární bod jsme nezískali.

Shrneme-li krok 3, výsledkem naší snahy bylo určení pěti stacionárních bodů: $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$, $A_3 = [0, -1]$, $A_4 = [1, 0]$, $A_5 = [-1, 0]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu.

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= ((-2 + 4x^2)(2y^2 + x^2 - 1) - 4x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= ((-2 + 4y^2)(2y^2 + x^2 - 2) - 8y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

5. Do matice parciálních derivací postupně dosadíme stacionární body (tzn. x-ovou souřadnici stacionárního bodu dosadíme za proměnou x, y-ovou za y).

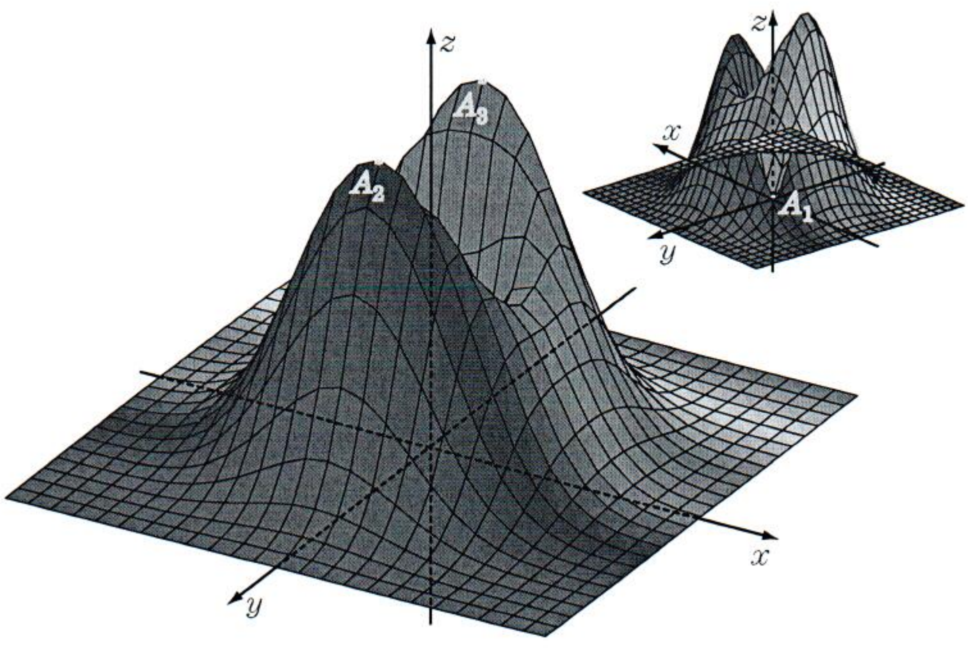
$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Q(A_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, Q(A_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix},$$

$$Q(A_4) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}, Q(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

6. Určíme hodnoty D_1, D_2 a rozhodneme o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0, 0]$	$2 > 0$	$8 > 0$	ostré lokální minimum $z = 0$
$A_2 = [0, 1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_3 = [0, -1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_4 = [1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje
$A_5 = [-1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje

V bodě A_1 má funkce f ostré lokální minimum. V bodech A_2, A_3 má funkce f ostrá lokální maxima. V bodech A_4, A_5 funkce f extrém nemá, Obr. 6.1.3.



Obr. 6.1.3

1. Posuzujme nejprve body na ose x s výjimkou počátku. Na prstencovém okolí libovolného takového bodu osy x nabývá x^2 nezáporných hodnot a pro $x_0 \neq 6$ je pro dostatečně malé okolí bodu $(x_0, 0)$ hodnota výrazu $(6 - x - y)$ buď stále nekladná nebo stále nezáporná (tímto okolím může být např. dvojinterval $(x_0 - \varepsilon/4, x_0 + \varepsilon/4) \times (-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$, kde $\varepsilon = |x_0 - 6|$). Ovšem na libovolném prstencovém okolí bodu $(x_0, 0)$ nabývá y^3 kladných i záporných hodnot, což implikuje že f nabývá pro $x_0 \neq 0$ a $x_0 \neq 6$ na nějakém okolí bodu $(x_0, 0)$ kladných i záporných hodnot, nemůže tedy mít v tomto bodě lokální extrém, neboť hodnota funkce f je v tomto bodě samozřejmě nula. Je-li $x_0 = 6$, nabývá funkce f kladných hodnot na „úsečce“ $\{x_0\} \times (0, 1)$ a záporných na „úsečce“ $\{x_0\} \times (-1, 0)$, opět tedy na každém okolí bodu $(6, 0)$ nabývá kladných i záporných hodnot. Ani v bodě $(6, 0)$ tedy není extrém.

2. Podobně nahlédneme, že funkce f nenabývá extrému v počátku, neboť nabývá kladných hodnot na množině $\{0\} \times (0, 1)$ a záporných na množině $\{0\} \times (-1, 0)$.

3. Vyšetřujme nyní extrémy funkce f ve zbylých bodech osy y. Opět, jestliže $y_0 \neq 6$ a $y_0 \neq 0$, potom existuje okolí bodu $(0, y_0)$ takové, že hodnota výrazu $6 - x - y$ je na něm nekladná nebo nezáporná (tímto okolím může být např. dvojinterval $(-\varepsilon/4, +\varepsilon/4) \times (y_0 - \varepsilon/4, y_0 + \varepsilon/4)$, kde $\varepsilon = |y_0 - 6|$). Stejně tak existuje okolí bodu $(0, y_0)$, kde je stále nekladný nebo nezáporný výraz y^3 (poslouží libovolný kroužek, který neprotíná počátek). A protože konečně x^2 je nezáporné číslo na $\mathbb{R}^2$ a průnik dvou okolí je okolí, dostáváme, že existuje okolí bodu $(0, y_0)$, kde funkce f nabývá pouze nekladných nebo nezáporných hodnot.

Navíc o tom, zda jsou tyto hodnoty nekladné nebo nezáporné, rozhoduje zřejmě znaménko výrazu $y^3(6 - x - y)$. Je-li x velmi malé a $y \neq 6$, je znaménko výrazu $(6 - x - y)$ stejné jako znaménko výrazu $(6 - y)$, tedy o znaménku f rozhoduje hodnota výrazu $y^3(6 - y)$, která je samozřejmě kladná pro $y \in (0, 6)$ a záporná jindy. Z předchozích úvah vyplývá, že hodnoty funkce f na nějakém okolí bodu $(0, y_0)$ pro $y_0 \in (0, 6)$ jsou nezáporné, a tedy funkce f má v těchto bodech (neostré) lokální minimum. Naopak, hodnoty funkce f na nějakém okolí bodu $(0, y_0)$ pro $y_0 \in (\infty, 0) \cup (6, +\infty)$ jsou nekladné, a tedy funkce f má v těchto bodech (neostré) lokální maximum.

4. Zbývá vyšetřit poslední bod $(0, 6)$. Funkce f zde lokální extrém nemá. Její hodnota v tomto bodě je nulová, přitom na úsečce $(-1, 0) \times \{6\}$ nabývá f kladných hodnot a na úsečce $(0, 1) \times \{6\}$ záporných hodnot. Na libovolném okolí bodu $(0, 6)$ tedy funkce nabývá hodnot větších i menších, než je hodnota funkce f v bodě $(0, 6)$. □

Úloha I.68. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Krácením trojek, vyjádřením $y = x^2$ z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme rovnici

$$x^4 - x = 0,$$

která má vzhledem k rozkladu $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1)$ dvě řešení, $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Těmto dvěma řešením přísluší řešení $y_1 = 0$ a $y_2 = 1$.

Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3.$$

Matice druhého diferenciálu v prvním stacionárním bodě $(1, 1)$ je tedy

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = 6 > 0$, $D_2 = 36 - 9 = 27 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a v bodě $(1, 1)$ má tedy funkce f lokální minimum $f(1, 1) = -1$.

Matice druhého diferenciálu ve druhém stacionárním bodě $(0, 0)$ je ovšem

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

je tedy indefinitní, funkce f v bodě $(0, 0)$ tedy nenabývá extrému. □

Úloha I.69. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2y - 2x.$$

Matice druhého diferenciálu je tedy

$$\begin{pmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

což je diagonální matice. Posoudit definitnost je tedy snazší přímo z hodnot na diagonále. Pokud jsou obě hodnoty kladné, je matice pozitivně definitní, což je případ čtyř bodů $(\pm\frac{1}{2}, \pm 1)$ - v nich má tedy funkce f lokální minimum. V bodě $(0,0)$ jsou obě hodnoty záporné, matice je tedy negativně definitní a v bodě $(0,0)$ má tedy funkce f lokální maximum. Ve zbylých čtyřech bodech je jedna hodnota na diagonále kladná a druhá záporná, matice je tedy indefinitní a extrému v daném bodě se nenabývá. □

1e **Úloha I.71.** $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$, $x > 0, y > 0$.

Řešení. Funkce f je dle zadání definována na prvním kvadrantu. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} y - \frac{50}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{20}{y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme, že $y = \frac{50}{x^2}$, dosazením do druhé a přenásobením jmenovatelem získáme rovnici

$$x - \frac{20}{50^2}x^4 = 0.$$

Její řešení jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{\frac{50^2}{20}} = \sqrt[3]{125} = 5$. První řešení ovšem nemůže být částí řešení celé soustavy. Odpovídající hodnotou pro druhý kořen je $y_2 = \frac{50}{25} = 2$. Funkce f má tedy (v prvním kvadrantu) jediný stacionární bod $(5,2)$.
Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Matice druhého diferenciálu v bodě $(5,2)$ je tedy

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = \frac{4}{5} > 0$ a $D_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a funkce f má tudíž v bodě $(5,2)$ (ostré) lokální minimum $f(5,2) = 30$. □

Úloha I.72. $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$, kde $a > 0, b > 0$.

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.73. $f(x,y) = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$, kde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.74. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.75. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

Řešení. Funkce f je dle zadání definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}(16x - 6y) = e^{2x+3y}(16x^2 + 16x - 12xy + 6y^2 - 6y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}(-6x + 6y) = e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y).$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} e^{2x+3y}(16x^2 + 16x - 12xy + 6y^2 - 6y) &= 0 \\ e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. Podotkněme, že je evidentní, že funkce f je nezáporná a nuly nabývá pouze v bodě $(0, 1)$, kde tedy nabývá globálního minima. Pojďme nicméně vyšetřit existenci extrémů standardním postupem. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad 2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0, 1)$, kde, jak už jsme zmínili funkce zřejmě nabývá globálního minima. Nemusíme tedy vyšetřovat definitnost matice druhého diferenciálu (navíc bychom tak dostali pouze informaci, že jde o lokální minimum). □

Úloha I.64. $f(x, y) = x^2 - (y-1)^2$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad -2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0, 1)$. Oproti předchozí úloze není automaticky vidět, zda se v tomto bodě nabývá extrému. Vyšetříme tedy definitnost matice druhého diferenciálu, tj. matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Určeme tedy nejprve druhé parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Matice druhého diferenciálu (v bodě $(0, 1)$) má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a její hlavní determinanty jsou $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -4 < 0$. Protože druhý hlavní determinant (tedy determinant celé matice) je záporný, je matice druhého diferenciálu indefitní, extrému se tedy v bodě $(0, 1)$ nenabývá. Funkce f tedy v žádném bodě nemá lokální extrém.[5] □

Úloha I.65. $f(x, y) = (x - y + 1)^2$

Řešení. Je vidět, že funkce f je nezáporná. Ve všech bodech přímky $x - y + 1 = 0$ tedy nabývá globálního minima. Přesvědčíme se, že jiné extrémy funkce f nemá. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y + 1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -2(x - y + 1).$$

Je zjevné, že obě parciální derivace jsou nulové právě v bodech zmíněné přímky. V jiných bodech se tedy extrému nenabývá. □

Úloha I.66. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Její parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y + 1.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 2x - y - 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

[5]) Úlohu lze opět řešit i pomocí úvah. Pokud $x \neq 0$, pak malým zvětšením absolutní hodnoty x se funkční hodnota f zvětší, zmenšením zmenší, takže v bodech, kde $x \neq 0$ se nemůže nabývat extrému. Z podobného důvodu nepřichází z hlediska extrému jiná možnost, než $y = 1$. Nicméně ani v bodě $(0, 1)$ se nemůže nabývat extrému. Malým posunem hodnoty y se funkce f dostane do záporných, zatímco malým posunem hodnoty x do kladných hodnot.

Řešením této rovnice jsou hodnoty $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Dosadíme-li získané hodnoty do rovnice $x^2 - 2y = 0$, abychom vypočetli y-ové souřadnice stacionárních bodů, dostáváme $y_1 = 0, y_2 = 2$. Zkoumaná funkce má tedy dva stacionární body $B_1 = [0, 0], B_2 = [2, 2]$.

Nyní přistoupíme ke zkoumání charakteru bodů B_1, B_2 a k tomu je zapotřebí vypočítat parciální derivace druhého řádu. Obdržíme

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -6 \qquad \text{a} \qquad f_{yy} = 6y.$$

Protože $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0.0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = -36 < 0$, vidíme, že bod B_1 je sedlovým bodem funkce $f(x, y)$.

Analogickým postupem ze vztahů $f_{xx}(2,2) \cdot f_{yy}(2,2) - [f_{xy}(2,2)]^2 = 108 > 0$ a $f_{xx}(2,2) = 12 > 0$ dostáváme, že bod B_2 je bodem lokálního minima funkce $f(x, y)$.

19 || **Příklad 8.11.** Najděte lokální extrémy funkce tří proměnných dané vztahem $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$.

Řešení. Vyjdeme opět z parciálních derivací finkce $f(x, y, z)$, které mají tvar

$$f_x = 3x^2 - 3y - 3z, \qquad f_y = 3y^2 - 3x \qquad \text{a} \qquad f_z = 3z^2 - 3x.$$

Položíme-li obdržené parciální derivace rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y - z &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \\ z^2 - x &= 0. \end{aligned}$$

Dále lze dosadit y^2 za x do první a třetí rovnice, což dává vztahy

$$\begin{aligned} y^4 - y - z &= 0 \\ z^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z rovnosti $z^2 = y^2$ máme $z = y$ nebo $z = -y$.

Uvažujme nejprve případ $z = y$. Dosadíme-li za z do rovnice $y^4 - y - z = 0$, dostáváme

$$y(y^3 - 2) = 0.$$

Z obdrženého vztahu vyplývá, že $y_1 = 0$ nebo $y_2 = \sqrt[3]{2}$. Dále ihned vidíme že těmto hodnotám odpovídají hodnoty proměnné z ve tvaru $z_1 = 0, z_2 = \sqrt[3]{2}$.

Z rovnosti $x = z^2$ pak vypočteme $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{4}$. Obdrželi jsme tedy dva stacionární body

$$B_1 = [0, 0, 0] \quad \text{a} \quad B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}].$$

Vyšetříme-li nyní případ $z = -y$, dostáváme po dosazení za proměnnou z do rovnice $y^4 - y - z = 0$ rovnost $y^4 = 0$, což nám dává kořen $y_3 = 0$. Pak ale také $z_3 = 0$ a $x_3 = 0$. V tomto případě jsme tedy neobdrželi žádný další stacionární bod, který by byl různý od bodů B_1 a B_2.

Pro parciální derivace druhého řádu dostaneme

$$f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{zz} = 6z, f_{xy} = -3, f_{xz} = -3, f_{yz} = 0.$$

Chceme-li nyní vyšetřit kvadratickou formu, kterou představuje diferenciál druhého řádu, pracujeme vlastně s determinantem

$$D = \begin{vmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{vmatrix}.$$

Uvažujeme-li bod $B_1 = [0, 0, 0]$, dostaneme

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ihned vidíme, že hlavní minor $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ je záporný, což znamená, že příslušná kvadratická forma je indefinitní a počátek je tedy sedlovým bodem funkce $f(x, y, z)$.

V bodě $B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$ máme

$$D = \begin{vmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[3]{2} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[3]{2} \end{vmatrix}$$

a vidíme, že $D_1 = 6\sqrt[3]{4} > 0, D_2 = 36 \cdot 2 - 9 > 0, D_3 = 216\sqrt[3]{16} - 108\sqrt[3]{2} > 0$. Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní a bod B_2 je v důsledku toho bodem lokálního minima funkce $f(x, y, z)$.

2a)

(2) $f(x,y) = 2y^2 - 4xy + x^4 + 3$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^2$

2

$\frac{\partial f}{\partial x} = -4y + 4x^3$ $\qquad 4(-y + x^3) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4x.$ $\qquad 4(y - x) = 0$

$y = x$

$\downarrow$

2

$-x + x^3 = 0$

$x(-1 + x^2) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = -1$

2

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$

4

$[0,0]$ $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0$ sedlo

$[1,1]$ $\begin{vmatrix} 12^{>0} & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 16 = 32 > 0$ lok. min

$[-1,-1]$ $\begin{vmatrix} 12^{>0} & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 32 > 0$ lok min

1b

(2) $f(x,y) = y^3 + y^2x - x^2 - 4x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2x - 4 \qquad y^2 - 2x - 4 = 0$$

2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 2yx \qquad y(3y + 2x) = 0$$

$\boxed{y=0}$ $\vee$ $x = -\frac{3}{2}y$

$-2x = 4$

$\boxed{x=-2}$

$y^2 + 3y - 4 = 0$

$(y+4)(y-1) = 0$

2

$\boxed{y=-4}$ $\boxed{y=1}$

$\boxed{x=6}$ $\boxed{x=-\frac{3}{2}}$

2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2x$$

4

$[-2,0]$: $\begin{vmatrix} \overset{<0}{-2} & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0$ l. max

$[6,-4]$: $\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = 24 - 64 = -40 < 0$ sedlo

$[-\frac{3}{2}, 1]$: $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -10 < 0$ sedlo

1c

(2) $f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 9y^2 + 30x$$

2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 18xy + 54y \qquad 18y(x+3) = 0$$

$y = 0 \quad \vee \quad x = -3$

2

$6x^2 + 30x = 0$

$6x(x+5) = 0$

$x = 0 \quad x = -5$

$54 - 90 + 9y^2 = 0$

$9y^2 = 36$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

$[0,0] \quad [-5,0] \quad [-3,2] \quad [-3,-2]$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 30 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18y$$

2

4x1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 18y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18x + 54$$

$[0,0]$: $\begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 54 \end{vmatrix} = 30 \cdot 54 > 0$ lok. min ($30 > 0$)

$[-5,0]$: $\begin{vmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -36 \end{vmatrix} = 30 \cdot 36 > 0$ lok. max ($-30 < 0$)

$[-3,2]$: $\begin{vmatrix} -6 & 36 \\ 36 & 0 \end{vmatrix} = -36^2 < 0$ sedlo

$[-3,-2]$: $\begin{vmatrix} -6 & -36 \\ -36 & 0 \end{vmatrix} = -36^2 < 0$ sedlo

1,1
(2) $f(x,y) = x^2y + xy^2 + x^2 - x$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 + 2x - 1$ $\qquad 2xy + y^2 + 2x - 1 = 0$

2

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy$ $\qquad x(x+2y) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -2y$

2

$y^2 - 1 = 0$

$y = \pm 1$

$2y(-2y) + y^2 - 4y - 1 = 0$

$+3y^2 + 4y + 1 = 0$

$(y+1)(3y+1) = 0$

$y = -1$, $x = 2$ $\qquad y = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$

$[0,1]$ $\quad [0,-1]$

$[2,-1]$ $\quad [\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$

2 $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 2$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x + 2y$

4×1 $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$

$[0,1]:$ $\quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$[0,-1]$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$[2,-1]$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$

< 0 sedlo

$[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$ $\quad \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} > 0$ $\quad$ lok. min

(2) 1e

$$f(x,y) = 5y^2 + 2y^3 + yx^2 + x^2$$

1 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2yx + 2x$

$2x(y+1)$ $\quad x=0 \quad \vee \quad y=-1$

1 $\frac{\partial f}{\partial y} = 10y + 6y^2 + x^2$

$y(10+6y) = 0$ $\qquad -4 + x^2 = 0$

$y=0 \quad \vee \quad y = -\frac{5}{3}$ $\qquad x = \pm 2$

3

$[2,-1] \quad [-2,-1] \quad [0,0] \quad [0,-5/3]$

2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y+2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10+12y$

3

$[0,0]$ $\quad \begin{array}{c} 10 \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} \end{array} = 20 > 0$ $\quad$ l. min

$[0,-5/3]$ $\quad \begin{array}{c} <0 \\ \begin{vmatrix} -4/3 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} \end{array} = \frac{40}{3} > 0$ $\quad$ l. max

$[2,-1]$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0$ $\quad$ sedlo

$[-2,-1]$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0$ $\quad$ sedlo

3a

Příklad 3.5.9.

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Řešení. Nejdříve vypočteme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y,z) = 3x^2 + 12y = 0 \quad \& \quad f_y(x,y,z) = 2y + 12x = 0 \quad \& \quad f_z(x,y,z) = 2z + 2 = 0.$$

Z poslední rovnice dostáváme $z = -1$, zatímco odečtením šestinásobku druhé rovnice od první rovnice obdržíme $x^2 - 24x = x(x-24) = 0$. Takže máme dva stacionární body $[0,0,-1]$ a $[24,-144,-1]$. Protože parciální derivace $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$ a $f_z(x,y,z)$ existují pro všechny body $[x,y,z] \in \mathbb{R}^3$, jsou nalezené body jedinými kandidáty na lokální extrémy. Nyní pomocí Hessovy matice rozhodneme, zda v některém z nich nastává lokální extrém (a případně určíme jeho druh). Parciální derivace druhého řádu jsou

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y,z) &= 6x, \quad & f_{xy}(x,y,z) &= 12, \quad & f_{xz}(x,y,z) &= 0, \\ f_{yy}(x,y,z) &= 2, \quad & f_{yz}(x,y,z) &= 0, \quad & f_{zz}(x,y,z) &= 2. \end{aligned}$$

V bodě $[0,0,-1]$ máme tedy Hessovu matici

$$\nabla^2 f(0,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je indefinitní (vyzkoušejte např. vektory $(1,1,0)^\top$ a $(1,-1,0)^\top$), tj. v bodě $[0,0,-1]$ nenastává extrém.

V bodě $[24,-144,-1]$ máme Hessovu matici

$$\nabla^2 f(\overset{24,-144,-1}{\cancel{0,0,-1}}) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která je pozitivně definitní. Takže funkce f má v bodě $[24,-144,-1]$ lokální minimum s hodnotou $f(24,-144,-1) = -6913$. ▲

Řešením této rovnice jsou hodnoty $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Dosadíme-li získané hodnoty do rovnice $x^2 - 2y = 0$, abychom vypočetli y-ové souřadnice stacionárních bodů, dostáváme $y_1 = 0, y_2 = 2$. Zkoumaná funkce má tedy dva stacionární body $B_1 = [0, 0], B_2 = [2, 2]$.

Nyní přistoupíme ke zkoumání charakteru bodů B_1, B_2 a k tomu je zapotřebí vypočítat parciální derivace druhého řádu. Obdržíme

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -6 \qquad \text{a} \qquad f_{yy} = 6y.$$

Protože $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0.0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = -36 < 0$, vidíme, že bod B_1 je sedlovým bodem funkce $f(x, y)$.

Analogickým postupem ze vztahů $f_{xx}(2,2) \cdot f_{yy}(2,2) - [f_{xy}(2,2)]^2 = 108 > 0$ a $f_{xx}(2,2) = 12 > 0$ dostáváme, že bod B_2 je bodem lokálního minima funkce $f(x, y)$.

3b)

Příklad 8.11. Najděte lokální extrémy funkce tří proměnných dané vztahem $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$.

Řešení. Vyjdeme opět z parciálních derivací finkce $f(x, y, z)$, které mají tvar

$$f_x = 3x^2 - 3y - 3z, \qquad f_y = 3y^2 - 3x \qquad \text{a} \qquad f_z = 3z^2 - 3x.$$

Položíme-li obdržené parciální derivace rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y - z &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \\ z^2 - x &= 0. \end{aligned}$$

Dále lze dosadit y^2 za x do první a třetí rovnice, což dává vztahy

$$\begin{aligned} y^4 - y - z &= 0 \\ z^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z rovnosti $z^2 = y^2$ máme $z = y$ nebo $z = -y$.

Uvažujme nejprve případ $z = y$. Dosadíme-li za z do rovnice $y^4 - y - z = 0$, dostáváme

$$y(y^3 - 2) = 0.$$

Z obdrženého vztahu vyplývá, že $y_1 = 0$ nebo $y_2 = \sqrt[3]{2}$. Dále ihned vidíme že těmto hodnotám odpovídají hodnoty proměnné z ve tvaru $z_1 = 0, z_2 = \sqrt[3]{2}$.

Z rovnosti $x = z^2$ pak vypočteme $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{4}$. Obdrželi jsme tedy dva stacionární body

$$B_1 = [0,0,0] \quad \text{a} \quad B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}].$$

Vyšetříme-li nyní případ $z = -y$, dostáváme po dosazení za proměnnou z do rovnice $y^4 - y - z = 0$ rovnost $y^4 = 0$, což nám dává kořen $y_3 = 0$. Pak ale také $z_3 = 0$ a $x_3 = 0$. V tomto případě jsme tedy neobdrželi žádný další stacionární bod, který by byl různý od bodů B_1 a B_2.

Pro parciální derivace druhého řádu dostaneme

$$f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{zz} = 6z, f_{xy} = -3, f_{xz} = -3, f_{yz} = 0.$$

Chceme-li nyní vyšetřit kvadratickou formu, kterou představuje diferenciál druhého řádu, pracujeme vlastně s determinantem

$$D = \begin{vmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{vmatrix}.$$

Uvažujeme-li bod $B_1 = [0,0,0]$, dostaneme

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ihned vidíme, že hlavní minor $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ je záporný, což znamená, že příslušná kvadratická forma je indefinitní a počátek je tedy sedlovým bodem funkce $f(x,y,z)$.

V bodě $B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$ máme

$$D = \begin{vmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[3]{2} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[3]{2} \end{vmatrix}$$

a vidíme, že $D_1 = 6\sqrt[3]{4} > 0, D_2 = 36 \cdot 2 - 9 > 0, D_3 = 216\sqrt[3]{16} - 108\sqrt[3]{2} > 0$. Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní a bod B_2 je v důsledku toho bodem lokálního minima funkce $f(x,y,z)$.

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = y\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

a tedy

$$Hf\,(-2,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}\,(-2,0) & f_{xy}\,(-2,0) \\ f_{yx}\,(-2,0) & f_{yy}\,(-2,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že vlastními čísly diagonální matice jsou právě hodnoty na diagonále a že pozitivní definitnost matice znamená, že všechna její vlastní čísla jsou kladná. Odtud již plyne, že v bodě $[-2,0]$ je ostré lokální minimum. □

3c **8.3.** Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \tfrac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Funkce f je polynomem (mnohočlenem), a tudíž o ní víme, že má parciální derivace všech řádů. Hledejme proto stacionární body (jinde extrém být nemůže) tak, že zderivujeme f postupně podle x, y, z a tyto derivace položíme rovny nule. Takto dostaneme

$$3x^2 - 3z = 0, \quad \text{tj.} \quad z = x^2,$$
$$2y - 2 = 0, \quad \text{tj.} \quad y = 1,$$

a (s využitím první rovnice)

$$z - 3x + 2 = 0, \quad \text{tj.} \quad x \in \{1,2\}.$$

Existují tedy dva stacionární body $[1,1,1]$, $[2,1,4]$. Vypočtěme nyní všechny parciální derivace druhého řádu

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{xz} = f_{zx} = -3,$$
$$f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = f_{zy} = 0, \quad f_{zz} = 1.$$

S jejich pomocí ve stacionárních bodech snadno určíme Hessovu matici

$$Hf\,(1,1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Hf\,(2,1,4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme zjistit, zda jsou tyto matice pozitivně definitní, negativně definitní, příp. indefinitní, abychom mohli rozhodnout, jestli a jaké jsou v nich extrémy. V případě první z matic (pro bod $[1,1,1]$) ihned vidíme vlastní číslo $\lambda = 2$. Neboť je její determinant roven -6 a jedná se o symetrickou matici (všechna vlastní čísla jsou reálná), matice musí mít také záporné vlastní číslo (determinant je součinem vlastních čísel). Matice $Hf\,(1,1,1)$ je tedy indefinitní – v bodě $[1,1,1]$ extrém není.

Pro matici $Hf\,(2,1,4)$ použijeme tzv. Sylvestrovo kritérium. Podle tohoto kritéria je reálná symetrická matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní, právě když všechny hlavní minory A, tj. determinanty

$$d_1 = \left|a_{11}\right|, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad d_n = |\,A\,|,$$

jsou kladné, a je negativně definitní tehdy a jenom tehdy, když je

$$d_1 < 0, \quad d_2 > 0, \quad d_3 < 0, \quad \dots, \quad (-1)^n d_n > 0.$$

Neboť

$$\left|12\right| = 12 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0,$$

matice $Hf\,(2,1,4)$ je pozitivně definitní – v bodě $[2,1,4]$ je ostré lokální minimum. □

8.4. Stanovte lokální extrémy funkce

$$z = \left(x^2 - 1\right)\left(1 - x^4 - y^2\right), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Opět spočítáme parciální derivace z_x a z_y a položíme je rovny nule. Takto obdržíme rovnice

$$-6x^5 + 4x^3 + 2x - 2xy^2 = 0, \quad \left(x^2 - 1\right)(-2y) = 0$$

s řešeními $[x,y] = [0,0]$, $[x,y] = [1,0]$, $[x,y] = [-1,0]$. Doplňme, že k nalezení řešení stačilo určit reálné kořeny $1,-1$ polynomu $-6x^4 + 4x^2 + 2$ pomocí substituce $u = x^2$. Nyní vypočítáme druhé parciální derivace

$$z_{xx} = -30x^4 + 12x^2 + 2 - 2y^2, \quad z_{xy} = z_{yx} = -4xy, \quad z_{yy} = -2\left(x^2 - 1\right)$$

a ve stacionárních bodech vyčíslíme Hessovu matici se ziskem

$$Hz\,(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hz\,(1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hz\,(-1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že první z matic je pozitivně definitivní, a tudíž je v počátku ostré lokální minimum.

Zbývající dvě matice jsou ale negativně semidefinitní. Nelze tedy na základě druhých parciálních derivací s určitostí říci, zda je v bodech $[1,0]$, $[-1,0]$ extrém. Zkoumejme proto funkční hodnoty v okolích těchto bodů. Platí

$$z(1,0) = z(-1,0) = 0, \qquad z(x,0) < 0 \quad \text{pro } x \in (-1,1).$$

Uvažujme dále y v závislosti na $x \in (-1,1)$ dané předpisem $y = \sqrt{2\,(1 - x^4)}$ splňujícím, že $y \to 0$ pro $x \to \pm 1$. Pro tuto volbu je však

$$z\left(x, \sqrt{2\,(1 - x^4)}\right) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^4 - 1\right) > 0, \quad x \in (-1,1).$$

Ukázali jsme, že v libovolně malých okolích bodů $[1,0]$, $[-1,0]$ nabývá z hodnot větších i menších, než je funkční hodnota v těchto bodech. Nejedná se tak o extrémy. □

2a)

Příklad 17.1°. Vyšetřujme extrémy funkce

$$f(x,y) := x^3 - 2x^2y + 3y^3 \ \text{ v } \ X := \langle -1, 1\rangle^2. \tag{1}$$

Protože f je třídy C_∞ v celé rovině, najdeme nejdříve všechny její stacionární body. Snadno zjistíme, že funkce

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 9y^2 \tag{2}$$

mají jediný společný kořen, a to bod $(0,0)$. Protože f v něm nabývá hodnoty 0 a protože f je v některých bodech z X kladná, v jiných záporná ($f(\pm 1, 0) = \pm 1$), *nemá f v bodě $(0,0)$ žádný extrém.*

Protože f v $\operatorname{int} X$ ani maxima, ani minima nenabývá, leží oba extrémy na hranici X. Vzhledem k tomu, že ∂X je sjednocením čtyř úseček, vyšetříme funkce

$$g_1(x) := f(x,-1) = x^3 + 2x^2 - 3\,, \quad g_2(x) := f(x,1) = x^3 - 2x^2 + 3\,, \tag{3}$$

$$h_1(y) := f(-1,y) = 3y^3 - 2y - 1\,, \quad h_2(y) := f(1,y) = 3y^3 - 2y + 1\,. \tag{4}$$

Derivace $3x^2 + 4x$ a $3x^2 - 4x$ funkcí (3) [1]) jsou rovny nule po řadě v bodech 0, $-\frac{4}{3}$ a v bodech 0, $\frac{4}{3}$. Protože body $\pm(\frac{4}{3}, 1)$ neleží v X, počítáme pouze hodnoty

$$f(-1,-1) = -2\,, \quad f(0,-1) = -3\,, \quad f(1,-1) = 0\,, \tag{5'}$$

$$f(-1,1) = 0\,, \qquad f(0,1) = 3\,, \qquad f(1,1) = 2\,. \tag{5''}$$

Derivace $h_1'(y) = h_2'(y) = 9y^2 - 2$ funkcí (4) mají kořeny $\pm c$, kde $c := \frac{1}{3}\sqrt{2}$; protože hodnoty funkce f ve vrcholech čtverce X jsou již uvedeny v (5′) a v (5″), počítáme jen

$$f(-1,-c) = \tfrac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -0.37\,, \quad f(-1,c) = -\tfrac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -1.63\,, \tag{6'}$$

$$f(1,-c) = 1 + \tfrac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 1.63\,, \qquad f(1,c) = 1 - \tfrac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 0.37\,. \tag{6''}$$

Porovnáme-li hodnoty z (5′) – (6″), vidíme, že

$$M := \max f(X) = f(0,1) = 3\,, \quad m := \min f(X) = f(0,-1) = -3\,. \tag{7}$$

Pro všechny body $(x,y) \in X$, pro něž je $(0,1) \neq (x,y) \neq (0,-1)$, platí přitom ostré nerovnosti $m < f(x,y) < M$.

Příklad 17.2°. Najděme extrémy funkce

$$f(x,y) := 4x^3 - 3x - 4y^3 + 9y \ \text{ v } \ X := \{(x,y);\, x^2 + y^2 \le 1\}; \tag{8}$$

f je opět třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 3 = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -12y^2 + 9 = 0 \tag{9}$$

[1]) Funkce (3) buď skutečně derivujeme, nebo (což je zejména ve složitějších případech asi jednodušší) dosadíme do první rovnosti v (2) po řadě $y = -1$ a $y = 1$.

10. Hledání extrémů funkce na množině

Ukážeme si základní metody hledání největší a nejmenší hodnoty funkce více reálných proměnných na množině (a bodů, ve kterých se těchto hodnot nabývá). V případě, že funkce největší a nejmenší hodnoty nenabývá, budeme hledat supremum a infimum. Jak jsme se již zmínili, budou nás zajímat především funkce více proměnných. Přesto bude užitečné umět vyšetřovat funkce jedné proměnné, jejichž extrémy hledáme například pomocí vyšetření monotonie. Hlavní metody jsou popsány v [Z, oddíl 2.9].

Extrémům ve smyslu předchozího odstavce se často říká *globální extrémy* (někdy *absolutní extrémy*, viz [Z]), aby se odlišily od lokálních extrémů. My budeme říkat prostě extrémy, což je jednak kratší a jednak dostatečně určující.

§66. Asi nejdůležitějším prostředkem hledání extrémů je kombinace existenční věty a různých nutných podmínek pro (lokální) extrém (tzv. **„metoda podezřelých bodů“**). Základní existenční větou je věta následující.

Reálná funkce spojitá na neprázdné kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$ nabývá na M svého maxima i minima.

Nejjednodušší nutná podmínka vychází z pozorování, že nabývá-li se extrém v nějakém vnitřním bodě množiny, pak je v tomto bodě i lokální extrém, a z následující věty.

Nechť G je podmnožina $\mathbb{R}^n$ a funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ nechť má v bodě $a \in G^\circ$ lokální extrém. Pokud pro nějaké $i = 1, \dots, n$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Metoda spočívá v tom, že vyloučíme body, které nesplňují námi uvažované nutné podmínky. Zbylým bodům se říká „podezřelé body“. Mezi nimi dále hledáme ty, v nichž je funkční hodnota největší nebo nejmenší. V následujícím příkladu ukážeme, jak uvedený postup použijeme s použitím uvedené nutné podmínky.

45) <u>Příklad</u> Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

Řešení. Funkce f je polynom v proměnných x a y, je tedy spojitá na celém $\mathbb{R}^2$. Množina M je uzavřená (lze vyjádřit např. jako průnik dvou množin, které jsou vzorem uzavřených intervalů při spojité funkci) a omezená (je totiž rovna uzavřenému čtverci o straně 2, se středem v počátku a se stranami rovnoběžnými s osami, je tedy obsažena v kruhu o poloměru $\sqrt{2}$ se středem v počátku), je tudíž kompaktní. Navíc je M zřejmě neprázdná, a tak f nabývá na M svých extrémů.

Nyní již víme, že f nabývá na M extrémů, zbývá tyto hodnoty určit. Vyloučíme tedy body, kde extrém být nemůže, pomocí uvedené nutné podmínky. Množina M však není otevřená, musíme proto rozlišit dva případy.

a) Funkce f nabývá některého extrému v nějakém bodě vnitřku M. Protože f má parciální derivace prvního řádu, musí být v tomto bodě nulové. Platí tedy

$2x + y = 0$, $-6y + x = 0$, což je splněno pouze pro $x = y = 0$. Jediný bod vnitřku M, kde f může nabývat extrému, je tedy bod $(0, 0)$, kde $f(0, 0) = 0$.

b) Funkce f nabývá některého extrému na hranici M. Protože M je uzavřená, je její hranice rovna $M \setminus M^\circ$, je tedy tvořena čtyřmi úsečkami. Probereme je postupně.

i) $x = 1$, $y \in [-1, 1]$. Na této úsečce má funkce f tvar $f(1, y) = 1 + y - 3y^2$. Má-li f extrém v bodě $(1, y_0)$, pak funkce (jedné proměnné) $y \mapsto 1 + y - 3y^2$ má extrém (stejného druhu) v bodě y_0. To se může stát buď v případě, že y_0 je krajním bodem intervalu $[-1, 1]$, nebo v případě, že uvedená funkce jedné proměnné má v y_0 nulovou derivaci (protože derivace existuje). První možnost dává body $(1, -1)$ a $(1, 1)$, přičemž $f(1, -1) = -3$ a $f(1, 1) = -1$. Druhá možnost dává rovnici $1 - 6y = 0$, tedy bod $(1, 1/6)$, přičemž $f(1, 1/6) = 13/12$.

ii) $x = -1$, $y \in [-1, 1]$. Na této úsečce má funkce f tvar $f(-1, y) = 1 - y - 3y^2$. Podobně jako v předchozím bodu dostáváme jednak krajní body $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$, přičemž $f(-1, 1) = -3$ a $f(-1, -1) = -1$; a pak body, v nichž platí $-1 - 6y = 0$, neboli bod $(-1, -1/6)$. V něm máme $f(-1, -1/6) = 13/12$.

iii) $y = 1$, $x \in (-1, 1)$. Zde krajní body vyšetřovat nemusíme, neboť jsme je zahrnuli již v bodech i) a ii). Funkce f má zde tvar $f(x, 1) = x^2 + x - 3$. Je-li v nějakém bodě extrém, platí v něm $2x + 1 = 0$, což splňuje jen bod $(-1/2, 1)$. V něm máme $f(-1/2, 1) = -13/4$.

iv) $y = -1$, $x \in (-1, 1)$. Funkce f má zde tvar $f(x, 1) = x^2 - x - 3$. Je-li v nějakém bodě extrém, platí v něm $2x - 1 = 0$, což splňuje jen bod $(1/2, -1)$. V něm máme $f(1/2, -1) = -13/4$.

Zbývá učinit závěr. Víme, že funkce f svých extrémů na M nabývá a že jich nemůže nabývat mimo nalezených devět bodů. Porovnáním hodnot ve zmíněných bodech zjistíme, že maximum je rovno $13/12$ a nabývá se ve dvou bodech $(1, 1/6)$ a $(-1, -1/6)$; a minimum je $-13/4$ a nabývá se v bodech $(-1/2, 1)$ a $(1/2, -1)$. ■

Poznamenejme, že při vyšetřování funkce f na hranici množiny M v předchozím příkladě jsme mohli využít symetrie této funkce, konkrétně toho, že $f(-x, -y) = f(x, y)$ pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pak výsledek případu (ii) lze odvodit z případu (i) a výsledek případu (iv) lze odvodit z případu (iii).

§67. Z řešení příkladu v předchozím paragrafu je zřejmé, že potřebujeme znát nutné podmínky pro extrém na hranici množiny. Ve zmíněném příkladu bylo možné analýzu hranice jednoduše převést na analýzu funkce jedné proměnné. To je možné i v dalších případech pomocí **parametrizace hranice**, například, je-li hranicí kružnice či elipsa.

4c)

<u>P ř í k l a d</u> Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = x + y$ na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Řešení. Množina M je uzavřená (lze ji vyjádřit jako vzor uzavřeného intervalu při spojitém zobrazení) a omezená (z definující nerovnosti je zřejmé, že každý bod

$(x, y) \in M$ splňuje $|x| \leq 1/2$ a $|y| \leq 1$), je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$, a tedy nabývá na množině M svých extrémů.

Protože $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ ve všech bodech $\mathbb{R}^2$, parciální derivace nejsou nikde nulové (a všude existují), a tudíž f nemá ve vnitřku M žádný lokální extrém. Proto nabývá svých extrémů na hranici.

Hranicí množiny M je množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4x^2 + y^2 = 1\}$ (množina M je elipsa včetně svého vnitřku, hranicí je její obvod). Tu můžeme parametrizovat pomocí modifikace polárních souřadnic: $x = \frac{1}{2}\cos t$, $y = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Tato parametrizovaná křivka obvod elipsy proběhne nekonečněkrát, kdybychom chtěli každý bod proběhnout právě jednou, museli bychom se omezit na menší interval, například na $t \in [0, 2\pi)$. To my však nepotřebujeme. Nyní použijeme pozorování, že má-li f extrém v nějakém bodě $(x, y) = (\frac{1}{2}\cos t_0, \sin t_0)$, pak má funkce $t \mapsto f(\frac{1}{2}\cos t, \sin t) = \frac{1}{2}\cos t + \sin t$ extrém v bodě t_0. Tato funkce je diferencovatelnou funkcí jedné proměnné, a tedy v bodech extrému musí mít nulovou derivaci. Odtud dostáváme rovnici $-\frac{1}{2}\sin t + \cos t = 0$, neboli $\sin t = 2\cos t$. Protože $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, musí platit $\sin t = 2/\sqrt{5}$ a $\cos t = 1/\sqrt{5}$ nebo $\sin t = -2/\sqrt{5}$ a $\cos t = -1/\sqrt{5}$. Mohli bychom nyní možné hodnoty t vyjádřit pomocí cyklometrických funkcí. To však není třeba, protože nás zajímají body $(\frac{1}{2}\cos t, \sin t)$ a nikoli hodnota t. Dostáváme tedy dva body $(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a $(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

Je $f(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ a $f(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, v prvním z bodů je tedy maximum a ve druhém minimum. ■

Podobně můžeme postupovat vždy, když hranici umíme vhodně parametrizovat – ať již celou nebo po částech. Pro kružnici můžeme použít polární souřadnice, pro povrch koule v $\mathbb{R}^3$ sférické souřadnice atp.

§68. Další metodou užitečnou při vyšetřování funkcí na některých množinách bez vnitřních bodů (např. na hranicích některých množin) je **metoda Lagrangeových multiplikátorů**. Je založena na použití Věty 217 v [D2, kapitola X, §3], konkrétně její první části, která obsahuje nutnou podmínku pro lokální extrém funkce na množině určené několika rovnostmi. Znění této věty je připomenuto v §64. Níže uvedené odkazy používají tam uvedené značení.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte extrémy funkce $f(x, y, z) = x$ na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^3 + y^3 + z^3 = 0\}.$$

Řešení. Množina M je zřejmě uzavřená, omezená a neprázdná, funkce f spojitá dokonce na celém $\mathbb{R}^3$, a tedy f na M svých extrémů nabývá.

Při jejich hledání využijeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Aby ji bylo možno použít, rozdělíme si množinu M na dvě části

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$$

Příklad 3.5.11.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

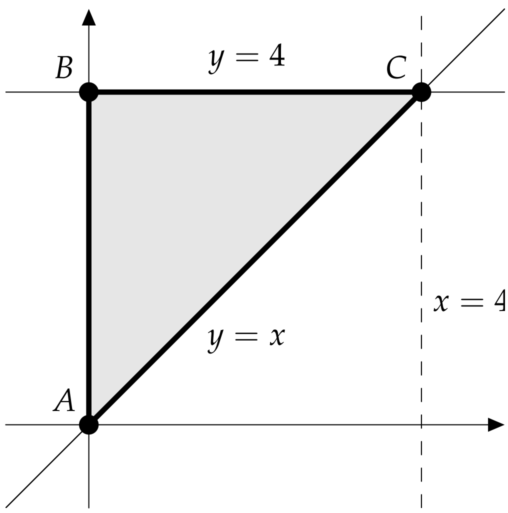
$$f(x,y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$$

na množině na množině M, která je určena nerovnostmi $0 \le x \le y \le 4$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 2x - 1 = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = -6y + 18 = 0.$$

Řešením je bod $[1/2, 3]$ s funkční hodnotou $f(1/2, 3) = 123/4$. Protože $[1/2, 3] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.37: Množina M z Příkladu 3.5.11.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.37), kterou tvoří tři úsečky:

(i) Úsečku spojující body A a B lze vyjádřit jako $x = 0$ pro $0 \le y \le 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(y) = -3y^2 + 18y + 4$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(y) = -6y + 18 = 0$. Odtud máme $y = 3$, což vyhovuje omezení pro y. Proto $[0,3]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(0,3) = 31$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(0,0) = 4$ a $f(B) = f(0,4) = 28$.

(ii) Úsečku spojující body B a C lze vyjádřit jako $y = 4$ pro $0 \le x \le 4$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = x^2 - x + 28$. Určíme stacionární body funkce h, tj. $h'(x) = 2x - 1 = 0$. Odtud máme $x = 1/2$, což vyhovuje omezení pro x. Proto

$[1/2, 4]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(1/2, 4) = 111/4$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(B) = f(0, 4) = 28$ a $f(C) = f(4, 4) = 40$.

(ii) Úsečku spojující body C a A lze vyjádřit jako $y = x$ pro $0 \leq x \leq 4$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $m(x) = -2x^2 + 17x + 4$. Určíme stacionární body funkce m, tj. $m'(x) = -4x + 17 = 0$. Odtud máme $x = 17/4$, což nevyhovuje omezení pro x, tj. $[17/4, 17/4] \notin M$. Takže v tomto případě jsou kandidáty pouze krajní body této úsečky, v nichž vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(C) = f(4, 4) = 40$ a $f(A) = f(0, 0) = 4$.

Celkem jsme nalezli 6 kandidátů na globální extrém, ze kterých stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, 0]$ s hodnotou $f_{\min} = 4$ a globální maximum v bodě $[4, 4]$ s hodnotou $f_{\max} = 40$. ▲

4e)

Příklad 3.5.13.

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

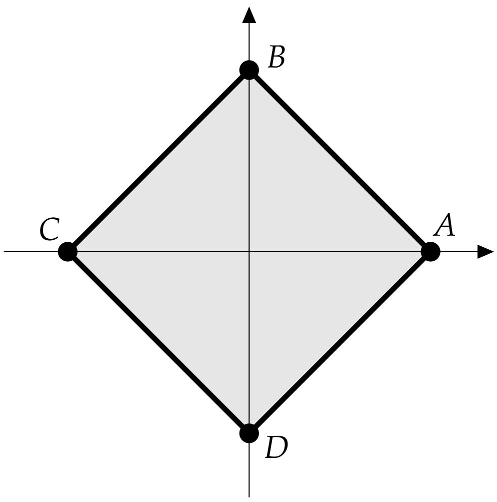
$$f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$$

na čtverci s vrcholy $A = [2,0]$, $B = [0,2]$, $C = [-2,0]$ *a* $D = [0,-2]$.

Řešení. Protože množina M je kompaktní a funkce f je na této množině spojitá, hledané body existují. Nejdříve určíme stacionární body funkce f, tj. vyřešíme soustavu

$$f_x(x,y) = 4x - 2y = 0 \quad \& \quad f_y(x,y) = -2x + 2y = 0.$$

Řešením je pouze bod $[0,0]$ s funkční hodnotou $f(0,0) = 0$. Protože $[0,0] \in M$, je tento bod jedním z kandidátů na hledaný globální extrém (nicméně není potřeba určovat jeho lokální charakter).



Obrázek 3.5.39: Množina M z Příkladu 3.5.13.

Nyní se zaměříme na hranici množiny M (viz Obrázek 3.5.39), kterou tvoří čtyři úsečky:

(i) Úsečku spojující body A a B lze vyjádřit jako $y = 2 - x$ pro $0 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $g(x) = (2x-2)^2 + x^2$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = 10x - 8 = 0$. Odtud máme $x = 4/5$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[4/5, 6/5]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(4/5, 6/5) = 4/5$. Dalšími kandidáty jsou také krajní body této úsečky, takže ještě vypočteme příslušné funkční hodnoty, tj. $f(A) = f(2,0) = 8$ a $f(B) = f(0,2) = 4$.

(ii) Úsečku spojující body B a C lze vyjádřit jako $y = x + 2$ pro $-2 \leq x \leq 0$, takže z funkce $f(x,y)$ dostaneme funkci $h(x) = 4 + x^2$. Určíme stacionární body funkce g, tj. $g'(x) = 2x = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0,2]$ je dalším kandidátem na globální extrém, který je ale totožný s bodem B, jehož funkční hodnotu jsme vypočítali v předchozí části. Ještě zbývá určit funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky, tj. $f(C) = f(-2, 0) = 8$.

(iii) Úsečku spojující body C a D lze vyjádřit jako $y = -x - 2$ pro $-2 \leq x \leq 0$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $m(x) = (2x + 2)^2 + x^2$. Určíme stacionární body funkce m, tj. $m'(x) = 10x + 8 = 0$. Odtud máme $x = -4/5$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[-4/5, -6/5]$ je dalším kandidátem na globální extrém s hodnotou $f(-4/5, -6/5) = 4/5$. Ještě vypočteme funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky, tj. $f(D) = f(0, -2) = 4$.

(iv) Úsečku spojující body D a A lze vyjádřit jako $y = x - 2$ pro $0 \leq x \leq 2$, takže z funkce $f(x, y)$ dostaneme funkci $n(x) = 4 + x^2$. Určíme stacionární body funkce n, tj. $n'(x) = 2x = 0$. Odtud máme $x = 0$, což vyhovuje omezení pro x. Proto $[0, -2]$ je dalším kandidátem na globální extrém, který je ale totožný s bodem D, jehož funkční hodnotu jsme vypočítali v předchozí části stejně jako funkční hodnotu ve druhém krajním bodě úsečky.

Celkem jsme nalezli 7 kandidátů na globální extrém. Nyní stačí vybrat ten s nejmenší funkční hodnotou a ten s největší funkční hodnotou, tj. globální minimum nastává v bodě $[0, 0]$ s hodnotou $f_{\min} = 0$ a globální maximum v bodech $[2, 0]$ a $[-2, 0]$ s hodnotou $f_{\max} = 8$. ▲

- Následně je třeba uvažovat hranici množiny S. Ta je tvořena třemi částmi (úsečkami):
  - $x = 0$, $y \in [0, 1]$, $f = -2y - 3$. Do seznamu podezřelých bodů musíme přidat kraje této úsečky – tj. body **[0,1]** a **[0,1]**. Funkce f nyní závisí jen na y a jde o lineární funkci, takže zřejmě nemá pro $y \in (0, 1)$ extrém (o čemž bychom se mohli přesvědčit snadným derivováním).
  - $y = 0$, $x \in [0, 1]$, $f = x - 3$. Stejně jako předtím, přidáme kraje – bod $[0, 0]$ už mezi podezřelými body je, tedy pouze bod **[1,0]**. A opět jelikož jde (v závislosti na x) o lineární funkci, tak pro $x \in (0, 1)$ nemáme extrém.
  - A konečně úsečka $y \in [0, 1]$, $x = 1 - y$, $f = 1 - 3y - 3$. Oba kraje mezi podezřelými body už jsou, a opět není žádný podezřelý bod pro $y \in (0, 1)$.

Dohromady tedy máme tři podezřelé body, a sice $[0, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 0]$. Spočítáním funkčních hodnot dostaneme, že **maximum je M = -2 a nabývá se ho v bodě [1,0]. Minimum je m=-5 a nabývá se ho v bodě [0,1].**

4 b

b) $f(x, y) := x^2 - xy + y^2$, $S := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Opět jde o spojitou funkci na kompaktní množině, tedy Věta 4 zaručuje existenci minima i maxima. Zase tedy hledáme podezřelé body:

- Vnitřkem množiny S je otevřená jednotková koule (kruh). Potřebujeme parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x.$$

  Se vzpomínkou na Větu 4 řešíme soustavu rovnic $2x - y = 0$ a $2y - x = 0$, která má jediné řešení $x = y = 0$. A jelikož $[0, 0]$ je ve vnitřku S, máme první podezřelý bod: **[0,0]**.
- Hranicí je jednotková kružnice, kterou si parametrizujeme pomocí

$$\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \\ f(t) &= 1 - \sin t \cos t, \text{ kde} \\ t &\in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

  Do seznamu musíme přidat krajní body, to jest body odpovídající $t = 0$ a $t = 2\pi$. To je ale jen jeden bod, a sice **[1,0]**.
  Dále řešíme body na hranici pro $t \in (0, 2\pi)$. Funkce f závisí jen na t, derivujeme:

$$f'(t) = \sin^2(t) - \cos^2(t) = -\cos(2t)$$

  Má-li mít funkce v bodě odpovídající nějakému t extrém, musí tam být derivace nulová. Tedy pro t dostáváme možnosti $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ a $\frac{7\pi}{4}$. To dopovídá čtveřici bodů $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. (Případně jsme mohli v rovnici $\sin^2(t) - \cos^2(t)$ dosadit zpátky za x a y, dostali bychom $x^2 = y^2$, kde $[x, y]$ leží na jednotkové kružnici.)

Celkem tedy máme 6 podezřelých bodů: $[0,0]$, $[1,0]$, $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Dosazením do funkce f dostaneme, že

$$\mathbf{M} = \mathbf{f}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) = \mathbf{f}\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) = \frac{3}{2},$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{f}([\mathbf{0},\mathbf{0}]) = \mathbf{0}.$$

c) $f(x,y) := (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $S = \mathbb{R}^2$. Zřejmě $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, kde $g(t) = te^{-t}$. Obor hodnot funkce x^2+y^2 je $[0,\infty)$. Tedy potřebujeme vyšetřit průběh funkce g na tomto intervalu – zajímají nás minima a maxima. Jednoduchým zderivováním dostaneme, že minimum má funkce g v nule ($g(0) = 0$) a maximum má v bodě 1 ($g(1) = \frac{1}{e}$).

Zbývá si rozmyslet, kdy je x^2+y^2 rovno 0 a 1. Což je triviální, dostaneme tedy, že **minimum funkce f na $\mathbb{R}^2$ je 0, které se nabývá pouze v nule, a maximem je $\frac{1}{e}$ a nabývá se ho ve všech bodech kde $\mathbf{x^2+y^2=1}$, to jest na jednotkové kružnici se středem v počátku**.

d) $f(x,y) := \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $S = \{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{y^2} = 1\}$.

$$\mathbf{M} = \mathbf{f}\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{3}\right]\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{f}\left(\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{3}\right]\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

K řešení se dá dorazit třeba vyšetřením pomocné úlohy $f(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \widetilde{x} + \widetilde{y}$ na množině $\widetilde{S} = \{\widetilde{x}^2 + 3\widetilde{y}^2 \le 1\}$. Zpátky se pak dá vrátit substitucí $\widetilde{x} = \frac{1}{x}$ a $\widetilde{y} = \frac{1}{y}$.

Hranice množiny $\widetilde{S}$ je elipsa, a lze ji parametrizovat například takto:

$$x = \cos t,$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,$$
$$t \in [0, 2\pi).$$

e) $f(x,y,z) := (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$, $S = \{x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Zde množina není kompaktní, a tedy maxima ani minima se nabývat nemusí. A vskutku se ho ani nenabývá – stačí si funkci zderivovat a využít Věty 4.

Můžeme vyšetřit, kde se nabývá infima a suprema. Abychom s úlohou mohli nějak pracovat, tak je třeba se omezit na nějaký kompakt – množinu tedy uzavřeme a omezíme. Zjistíme, že uvnitř žádné podezřelé body nejsou. Nejsou dokonce ani na hraničních čtvrtrovinách. Zbývají hraniční přímky, kde nalezneme podezřelé body $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,\frac{1}{2},0]$ a $[0,0,\frac{1}{3}]$.

Infimum je $0 = f([0,0,0])$ a supremum je $\frac{1}{e} = f([1,0,0])$.

5) $f = x^3+y^2+z^2+6xy+2z$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+6y \quad \rightarrow \quad 3x^2+6(-3x)=0$

$3x(x-6)=0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y+6x \quad \rightarrow \quad y=-3x$

$x_1=0 \quad x_2=6$

$y_1=0 \quad y_2=-18$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z+2 \quad \rightarrow \quad z=-1$

body $A_1=[0,0,-1]$ a $A_2=[6,-18,-1]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$

pro A_2:

$$\begin{matrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$D_1 = 36 > 0$

$D_2 = 72-36 = 36 > 0$

$D_3 = 144-72 = 72 > 0$

→ pos. def. → lok. min

pro A_1:

$$\begin{matrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

matice má 0 subdet

→ Sylvestera nelze užít

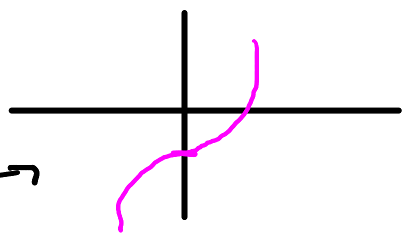
← sym. úpravami ukážeme, že je indef

↘ zkusíme [illegible] přímku

zkusíme přímku $[x,0,-1]$ (prochází bodem A_1)

$f(x,0,-1) = x^3+1-2 = x^3-1$

není ani max, ani min →



⑥ $f = (x - y^2)(2x - y^2)$

fix $y = kx$

$$\underbrace{f(x,kx)}_{g(x)} = (x - k^2x^2)(2x - k^2x^2) = 2x^2 + k^4x^4 - 3k^2x^3$$

$g'(x) = 4x + 4k^4x^3 - 9k^2x^2$ $\qquad g'(0) = 0$

$g'' = 4 + 12k^4x^2 - 18k^2x$ $\qquad g''(0) = 4 > 0$

lok. min

Spec $x = 0 \to f(0,y) = y^4$ $\qquad$ lok. min

na křivce $[\frac{3}{4}y^2, y]$

$$f = \left(\frac{3}{4}y^2 - y^2\right)\left(\frac{6}{4}y^2 - y^2\right) = -\frac{1}{8}y^4$$

lok max.

(7) (a) x^4+y^4

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow [0,0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lok. min

b) $-x^4-y^4$

$$\begin{pmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lok. max

c) x^4-y^2

$$\begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sedlo

Závěr: semi definitní matice

neříká o extrémech nic