

Matice ve výše uvedeném vzorci se liší pouze ve vyznačeném k -tém sloupci.

11.4.5. Příklad. Jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}\exp(u/x) \cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ \exp(u/x) \sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $[x, y] \mapsto u(x, y), [x, y] \mapsto v(x, y)$ třídy C^∞ . Spočítejte partiální derivace u a v v bodě $[1, 1]$.

Řešení. Definujme $F: \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ jako $F = (F_1, F_2)$, kde

$$\begin{aligned}F_1(x, y, u, v) &= \exp(u/x) \cos(v/y) - \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ F_2(x, y, u, v) &= \exp(u/x) \sin(v/y) - \frac{y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Pak F je třídy C^∞ na $(0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $F(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) = [0, 0]$. Dále máme

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \exp(u/x) \cos(v/y) & -\frac{1}{y} \exp(u/x) \sin(v/y) \\ \frac{1}{x} \exp(u/x) \sin(v/y) & \frac{1}{y} \exp(u/x) \cos(v/y) \end{pmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,1,0,\frac{\pi}{4}]} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(1, 1, 0, \frac{\pi}{4}) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Díky Větě 11.4.3 tedy existují na nějakém okolí U bodu $[1, 1]$ funkce $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^∞ splňující

$$F_1(x, y, u(x, y), v(x, y)) = F_2(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0.$$

Derivováním těchto vztahů podle x dostáváme

$$\begin{aligned}\exp(u/x) \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2} \cos(v/y) + \exp(u/x) (-\sin(v/y)) \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0, \\ \exp(u/x) \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x - u}{x^2} \sin(v/y) + \exp(u/x) \cos(v/y) \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Dosazením $x = y = 1, u(1, 1) = 0$ a $v(1, 1) = \frac{\pi}{4}$ dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{2}. \quad \leftarrow$$

Výpočet parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 1)$ a $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 1)$ by proběhl obdobně. ♣

11.5. Lokální extrémy funkce více proměnných

11.5.1. Definice. Necht (P, ρ) je metrický prostor, $M \subset P$, $a \in M$ a f je funkce z P do \mathbb{R} splňující $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **maxima (minima) na M** , jestliže platí

$$\forall x \in M : f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **lokálního maxima (lokálního minima) na M** , jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in B(a, \delta) \cap M : f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **ostrého lokálního maxima (ostrého lokálního minima) na M** , jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (B(a, \delta) \cap M) \setminus \{a\} : f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)).$$

11.5.2. Poznámka. Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a + th \in G$ pro $|t| < \delta$ a definujeme funkci $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a + th)$. Potom $g'(0) = f'(a)(h)$ a $g''(0) = f''(a)(h, h)$.

11.5.3. Věta (nutná podmínka existence lokálního extrému). Necht $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Necht funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Důkaz. Položme $g(t) = f(a + te^i)$. Pak má g v bodě 0 lokální extrém, a tedy $g'(0)$ buď neexistuje nebo je rovna 0. Odtud plyne tvrzení. ■

11.5.4. Věta (elipticita pozitivně definitní kvadratické formy). Necht $n \in \mathbb{N}$ a $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je pozitivně definitní kvadratická forma. Potom

$$\exists \varepsilon > 0 \forall h \in \mathbb{R}^n : Q(h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Důkaz. Jest

$$Q(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

pro vhodná $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy je zobrazení Q spojitě na \mathbb{R}^n . Označme

$$S = \{h \in \mathbb{R}^n; \|h\| = 1\}$$

a

$$\varepsilon = \inf\{Q(h); h \in S\}.$$

Řešení. (a) Necht $[x, y, z]$ splňuje rovnici $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pokud $y = 0$, $z = x$ a pravá strana rovnosti není definována. Tedy $y \neq 0$. Jelikož $z - x = \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$, je $z - x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Proto

$$y = (z - x) \operatorname{tg}(z - x) > 0$$

(funkce $u \operatorname{tg} u$ je kladná na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Derivujeme-li rovnost $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ podle x , dostáváme

$$z_x = 1 - \frac{y(z_x - 1)}{(z - x)^2 + y^2}.$$

Úpravou obdržíme

$$z_x((z - x)^2 + y^2 + y) = (z - x)^2 + y^2 + y,$$

tj. $z_x = 1$ (díky předchozím úvahám víme, že $(z - x)^2 + y^2 + y > 0$).

(b) Necht $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ splňující $b > 0$ je dáno. Uvažujme funkci $f(z) = -z + a + \operatorname{arctg} \frac{b}{z-a}$. Pak f je spojitá na (a, ∞) a splňuje $\lim_{z \rightarrow a^+} f(z) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = -\infty$. Existuje tedy $c \in (a, \infty)$ splňující $f(c) = 0$. Uvažujme nyní bod $[a, b, c]$ a funkci $F(x, y, z) = -z + x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$. Pak $F(a, b, c) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí $[a, b, c]$ a

$$\frac{\partial F}{\partial z}([a, b, c]) = -1 - \frac{b}{(c - a)^2 + b^2} < 0.$$

Dle Věty 11.4.1 existuje požadované okolí bodu $[a, b, c]$ a příslušná funkce z . ♣

11.8.32. Příklad. Ukažte, že existují funkce $u = u(x, y)$ a $v(x, u)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1, 2]$, které jsou na U třídy C^1 , splňují $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Dále vypočtete $u'(1, 2)$ a $v'(1, 2)$.

Řešení. Uvažujme bod $a = [1, 2, 0, 0]$ a funkci

$$F: [x, y, u, v] \mapsto \left[xe^{u+v} + 2uv - 2, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x \right].$$

Pak $F(a) = 0$, F je třídy C^∞ na nějakém okolí a a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(a) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[1,2,0,0]} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1, 2]$ a V obsahující $[0, 0]$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in$

V splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x, y)$ a $v(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U .

Derivujeme-li nyní vztahy

$$\begin{aligned}xe^{u+v} + 2uv - 2 &= 0 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x &= 0\end{aligned}\tag{11.32}$$

podle x , dostáváme

$$\begin{aligned}e^{u+v} + xe^{u+v}(u_x + v_x) + 2u_xv + 2uv_x &= 0 \\ ye^{u-v}(u_x - v_x) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_x(1+v) - uv_x) &= 0.\end{aligned}$$

Po dosazení $[x, y, u, v] = [1, 2, 0, 0]$ máme systém

$$\begin{aligned}u_x + v_x &= -1 \\ u_x - 2v_x &= 2,\end{aligned}$$

jehož řešením je $u_x(1, 2) = 0$ a $v_x(1, 2) = -1$.

Zderivováním (11.32) podle y dostaneme

$$\begin{aligned}xe^{u+v}(u_y + v_y) + 2u_yv + 2uv_y &= 0 \\ e^{u-v} + ye^{u-v}(u_y - v_y) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_y(1+v) - uv_y) &= 0.\end{aligned}$$

Po dosazení máme rovnice

$$\begin{aligned}u_y + v_y &= 0 \\ y_y - 2v_y &= -1.\end{aligned}$$

Řešení je $u_y(1, 2) = -\frac{1}{3}$ a $v_y(1, 2) = \frac{1}{3}$.

Proto $u'(1, 2) = [0, -\frac{1}{3}]$ a $v'(1, 2) = [-1, \frac{1}{3}]$. ♣

11.8.33. Příklad. Dokažte, že existují funkce $z(x, y)$, $t(x, y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1, -1]$ a splňují rovnice

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0, \quad x + y + z - t - 2 = 0,$$

spolu se vztahy $z(1, -1) = 2$, $t(1, -1) = 0$.

Spočtěte $z''(1, -1)$.

Řešení. Uvažujme bod $a = [1, -1, 2, 0]$ a funkci

$$F: [x, y, z, t] \mapsto \left[x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3, x + y + z - t - 2 \right].$$

3

Pak $F(a) = 0$, F je třídy C^∞ na \mathbb{R}^4 a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial t}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial t}(a) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Big|_{[x,y,z,t]=[1,-1,2,0]} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[1, -1]$ a V obsahující $[2, 0]$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $z(x, y)$ a $t(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U .

Derivujeme-li nyní rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\ x + y + z - t - 2 &= 0 \end{aligned}$$

podle x , máme

$$\begin{aligned} 2x - z z_x - 3t^2 t_x &= 0 \\ 1 + z_x - t_x &= 0. \end{aligned} \tag{11.33}$$

Po dosazení $[x, y, z, t] = [1, -1, 2, 0]$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} -2z_z &= 0 \\ z_x - t_x &= -1, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $z_x(1, -1) = 1$ a $t_x(1, -1) = 2$.

Zderivováním podle y dostáváme

$$\begin{aligned} 2y - z z_y - 3t^2 t_y &= 0 \\ 1 + z_y - t_y &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme $z_y(1, -1) = -1$, $t_y(1, -1) = 0$.

Obdržené vztahy znovu zderivujeme podle x , y a (11.33) podle y a dostaneme

$$\begin{aligned} 2 - (z_x)^2 - z z_{xx} - 6t(t_x)^2 - 3t^2 t_{xx} &= 0 \\ z_{xx} - t_{xx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - (z_y)^2 - z z_{yy} - 6t(t_y)^2 - 3t^2 t_{yy} &= 0 \\ z_{yy} - t_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} -z_y z_x - z z_{xy} - 6t t_y t_x - 3t^2 t_{xy} &= 0 \\ z_{xy} - t_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení vyjde $z_{xx}(1, -1) = t_{xx}(1, -1) = \frac{1}{2}$, $z_{yy}(1, -1) = t_{yy}(1, -1) = \frac{1}{2}$ a $z_{xy}(1, -1) = t_{xy}(1, -1) = \frac{1}{2}$. Tedy

$$z''(1, -1): [h_1, h_2] \mapsto \frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2.$$

♣

11.8.34. Příklad. Ukažte, že rovnice

$$x = u + v^2, \quad y = u^2 - v^3$$

definují na jistém okolí bodu $[3, 3]$ funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ třídy C^∞ , které splňují $u(3, 3) = 2$, $v(3, 3) = 1$. Spočtěte $z_{xy}(3, 3)$, pokud $z = 2uv$.

Řešení. Uvažujme bod $a = [3, 3, 2, 1]$ a funkci

$$F: [x, y, u, v] \mapsto [x - y - v^2, y - u^2 + v^3].$$

Pak $F(a) = 0$, F je třídy C^∞ na \mathbb{R}^4 a platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(a) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & -2v \\ -2u & 3v^2 \end{vmatrix}_{[x,y,u,v]=[3,3,2,1]} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11. \end{aligned}$$

Jsou tak splněny předpoklady Věty 11.4.3. Existuje proto okolí U obsahující $[3, 3]$ a V obsahující $[2, 1]$ takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x, y)$ a $v(x, y)$, dostáváme požadované funkce třídy C^∞ na U .

Vzhledem k tomu, že

$$z_{xy} = 2(u_{xy}v + u_xv_y + u_yv_x + uv_{xy}), \quad (11.34)$$

potřebujeme vypočítat jednotlivé derivace u a v . K tomuto účelu derivujeme rovnice

$$\begin{aligned} u + v^2 &= x \\ u^2 - v^3 &= y \end{aligned}$$

podle x a podle y . Dostaneme tak systémy

$$\begin{aligned} u_x + 2vv_x &= 1 \\ 2uu_x - 3v^2v_x &= 0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} u_y + 2vv_y &= 0 \\ 2uu_y - 3v^2v_y &= 1. \end{aligned}$$

Po dosazení máme

$$u_x(3, 3) = \frac{3}{11}, v_x(3, 3) = \frac{4}{11}, u_y(3, 3) = \frac{2}{11}, v_y(3, 3) = -\frac{1}{11}.$$

Dalším derivováním obdržíme soustavu

$$\begin{aligned}u_{yx} + 2v_x v_y + 2v v_{yx} &= 0 \\ 2u_x u_y + 2u u_{yx} - 6v v_x v_y - 3v^2 v_{yx} &= 0,\end{aligned}$$

jejímž řešením po dosazení je

$$u_{yx}(3, 3) = \frac{224}{11^3}, \quad v_{yx}(3, 3) = -\frac{68}{11^3}.$$

Díky záměnnosti partiálních derivací můžeme dosadit do (11.34) a obdržet $z_{xy}(3, 3) = \frac{26}{121}$. ♣

11.8.35. Příklad. Necht C^1 -funkce $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje rovnici

$$x u_y - y u_x = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje na \mathbb{R}^2 funkce $u^*(r, \alpha) = u(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, $(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Výsledek použijte k nalezení nějakého nekonstantního řešení původní rovnice.

Řešení. Pomocí Věty 11.2.18 máme

$$\begin{aligned}u_r^* &= u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha \\ u_\alpha^* &= u_x (-r \sin \alpha) + u_y (r \cos \alpha).\end{aligned}$$

Vyjádříme u_x a u_y a dostáváme

$$\begin{aligned}-r u_x &= -r \cos \alpha u_r^* + \sin \alpha u_\alpha^* \\ r u_y &= r \sin \alpha u_r^* + \cos \alpha u_\alpha^*.\end{aligned}$$

Pro $r \neq 0$ tak platí

$$\begin{aligned}-u_x &= -\cos \alpha u_r^* + \frac{1}{r} \sin \alpha u_\alpha^* \\ u_y &= \sin \alpha u_r^* + \frac{1}{r} \cos \alpha u_\alpha^*.\end{aligned}$$

Tedy pro $r \neq 0$ platí

$$0 = x u_y - y u_x = r \cos \alpha u_x - r \sin \alpha u_y = r u_\alpha^*.$$

Tedy $u_\alpha^* = 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Jelikož je u^* třídy C^1 , platí tato rovnost na \mathbb{R}^2 .

Nyní stačí zvolit funkci nezávislou na α , například $u^*(r, \alpha) = r^2$. Pak $u(x, y) = x^2 + y^2$, $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, je nekonstantní řešení zadané rovnice. ♣

11.8.36. Příklad. Necht C^2 -funkce $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje Laplaceovu rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Zjistěte, jakou rovnici splňuje funkce $u^*(r, \alpha) = u(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ na množině $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Řešení:

1. Označme $F(x, y) := x^3 + y^3 - 2xy$ a $A := [1, 1]$. Existence a hladkost zadané funkce plyne z Věty 1 – podmínky ověříme výpočtem.

Prvně si uvědomíme, že $F(A) = 0$. Následně derivujeme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 - 2y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= 3y^2 - 2x.\end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1 \neq 0$, a tedy jsou předpoklady Věty 1 splněny.

Dále $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = 1$.

Pro výpočet první derivace funkce y můžeme dosadit do vzorce z věty, tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x}(x) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = \\ &= -\frac{3x^2 - 2y(x)}{3y^2(x) - 2x}.\end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme $\mathbf{y}_x(\mathbf{1}) = \mathbf{y}'(\mathbf{1}) = -\mathbf{1}$. Pro výpočet druhé derivace musíme derivovat:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x) = -\frac{(6x - 2y_x(x))(3y^2(x) - 2x) - (3x^2 - 2y(x))(6y(x)y_x(x) - 2)}{(3y^2(x) - 2x)^2}.$$

Po dosazení

$$\mathbf{y}_{xx}(\mathbf{1}) = -\frac{(6 + 2)(3 - 2) - (3 - 2)(-6 - 2)}{(3 - 2)^2} = -\mathbf{16}.$$

- 5 2. První dvě rovnice již určují funkce $x(u, v)$ a $y(u, v)$ definované na nějakém okolí bodu $[5, -7]$ – viz Věta 2. Zderivujme první dvě rovnice podle v (budeme psát x místo $x(u, v)$ a x_v místo $\frac{\partial x}{\partial v}(u, v)$, obdobně pro funkci y):

$$\begin{aligned}0 &= 2xx_v + 2yy_v, \\ 1 &= 2xx_v - 2x_vy^2 - 4xyy_v.\end{aligned}$$

Dosadíme-li za x a y , dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ -6 & -8 & 1 \end{array} \right)$$

Řešením je

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_v(5, -7) &= -\frac{1}{2}, \\ \mathbf{y}_v(5, -7) &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Dobře definovanost funkce z_v by plynula z Věty 2, kde bychom museli uvažovat soustavu tří funkcí o pěti proměnných. Nicméně na to se nás úloha neptá. Derivaci funkce z spočítáme pomocí řetězkového pravidla. Nechť $f(x, y) = \log(y^2 - x^2)$. Pak $z(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$ a

$$\begin{aligned} z_v(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \\ &= \frac{-2x}{y^2 - x^2} x_v + \frac{2y}{y^2 - x^2} y_v, \end{aligned}$$

kam dosadíme již známá čísla ($x = 1$, $y = 2$, $x_v = -\frac{1}{2}$ a $y_v = \frac{1}{4}$):

$$z_v(5, -7) = \frac{-2}{4-1} \frac{-1}{2} + \frac{4}{4-1} \frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

3. Zde máme soustavu dvou funkcí o 4 neznámých, což můžeme zapsat třeba takhle

$$F(x, y, z, t) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 \\ x + y + z - t - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chceme (samozřejmě) použít Větu 2. Triviálně $F[1, -1, 2, 0] = 0$, a funkce F je zřejmě hladká až na půdu (tj. $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$). Zbývá podmínka s determinantem. Počítejmež:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(1, -1, 2, 0) & \frac{\partial F_1}{\partial t}(1, -1, 2, 0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(1, -1, 2, 0) & \frac{\partial F_2}{\partial t}(1, -1, 2, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{z=2, t=0} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Tedy existence vhodných okolí a funkcí z a t je zaručena Větou 2. Navíc jsou tyto funkce nekonečně hladké.

Pro výpočet druhých derivací je nejjednodušší zderivovat zadané rovnice. Nejprve podle x . Pro jednoduchost značme $z = z(x, y)$ a $z_x = z_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$, obdobně pro t a jiné parciální derivace. Dostaneme

$$\begin{aligned} 2x - zz_x - 3t^2 t_x &= 0, \\ 1 + z_x - t_x &= 0. \end{aligned}$$

To je soustava lineárních rovnic, vyřešením dostaneme

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{2x - 3t^2}{3t^2 + z}, \\ t_x &= \frac{2x + z}{3t^2 + z}. \end{aligned}$$

V zadaném bodě pak ($z(1, -1) = 2$ a $t(1, -1) = 0$)

$$z_x(1, -1) = 1,$$

$$t_x(1, -1) = 2.$$

Nás ale zajímají druhé derivace, tedy počítejme:

$$z_{xx} = \frac{(2 - 6tt_x)(3t^2 + z) - (2x - 3t^2)(6tt_x + z_x)}{(3t^2 + z)^2}$$

6

$$u = \ln(xy) + \cos v$$

$$[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$$

$$v = e^{x-u} - y^2 - v$$

bedingung $x(u, v), y(u, v)$

$$x(1, 0) = 1$$

$$y(1, 0) = 1$$

(2)

$$F_1 = \ln(xy) + \cos v - u$$

$$F_1(1, 1, 1, 0) = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$F_2 = e^{x-u} - y^2 - 2v$$

$$F_2 = e^0 - 1 - 2 \cdot 0 = 0 \checkmark$$

(1) $F_1, F_2 \in C^k(\mathbb{R})$

$$G = B_{1/2}(1, 1, 1, 0)$$

(3)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{xy} \cdot y$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{xy} \cdot x$$

in boden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^{x-u}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = -2y$$

(4) bedingung

$$\frac{dy}{dv} \text{ a } \frac{dx}{dv}$$

da we alle v:

$$0 = \frac{1}{xy} \left(\frac{dx}{dv} \cdot y + \frac{dy}{dv} \cdot x \right) + (-\sin v)$$

$$1 = e^{x-u} \left(\frac{dx}{dv} - 0 \right) - 2y \cdot \frac{dy}{dv} - 1$$

v boden

$$x=1 \quad y=1 \quad u=1 \quad v=0 \quad \text{maime}$$

$$0 = \frac{dx}{dv} + \frac{dy}{dv} \rightarrow -\frac{dy}{dv} = \frac{dx}{dv}$$

$$1 = \frac{dx}{dv} - 2 \frac{dy}{dv} - 1$$

$$2 = \frac{3dx}{dv} \rightarrow \boxed{\frac{2}{3} = \frac{dx}{dv}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dy}{dv} = -\frac{2}{3}}$$

analogicky do u:

$$1 = \frac{1}{xy} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot y + x \frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

$$0 = e^{x-y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} - 1 \right) - 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

v bodě:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1 - \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial u} - 1 - 2 \frac{\partial y}{\partial u} \quad 1 = 1 - \frac{\partial y}{\partial u} - 2 \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial u} = 0} \quad \text{a} \quad \boxed{\frac{\partial x}{\partial u} = 1}$$

(5) diferenciál:

z tedy máme, že $y(u,v)$ je $C^\infty \rightarrow$ tedy má spoj. 1. derivace

\rightarrow tedy má tot. dif. tvaru:

$$D_u(l_1, l_2) = 0 l_1 - \frac{2}{3} l_2$$

(7)

$$u = \ln(x^2 + y^2) - 2xy$$

$$v = e^{x \sin y} + \frac{1}{x^2}$$

$$[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$$

$$x(u, v), y(u, v)$$

$$z(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$$

$$? \frac{\partial \phi}{\partial u}(0, 1) = ?$$

(1) $F_1, F_2 \in C^0(G)$ $G = B_{1/2}(1, 0, 0, 1)$

$$F_1 = \ln(x^2 + y^2) - 2xy - u$$

$$F_2 = e^{x \sin y} + \frac{1}{x^2} - v$$

(2) $F_1(1, 0, 0, 1) = \ln 1 - 2 \cdot 0 - 0 = 0$

$$F_2 = e^1 \sin 0 + 1 - 1 = 0$$

(3)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - 2y$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2x$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^{x \sin y} - \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = e^{x \cos y}$$

→ bodle:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{1} - 2 \cdot 0 & 0 - 2 \\ 0 - 2 & e^1 \cdot 1 \end{vmatrix} = 2e \neq 0$$

→ Zloží matice J $x(u, v)$ a $y(u, v)$

(4) dce dle u:

$$1 = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(2x \frac{\partial x}{\partial u} + 2y \frac{\partial y}{\partial u} \right) - 2 \frac{\partial x}{\partial u} y - 2x \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = e^{x \sin y} \frac{\partial x}{\partial u} + e^{x \cos y} \frac{\partial y}{\partial u} + (-2) \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$$

→ bodle:

$$1 = 2 \frac{\partial x}{\partial u} - 2 \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$1 = e \frac{\partial y}{\partial u} - 2 \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = e \frac{\partial y}{\partial u} - 2 \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{1}{e-2} = \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{1+2}{e-2} = \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{e}{2e-4}$$

$$(5) \quad \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

Fetizek

↑ bodē $x=1$ $y=0$ $u=0$ $v=1$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} (0,1) = 1 \cdot 0 \cdot -1 \cdot \frac{e}{2e-4} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{e-2} = \boxed{\frac{1}{e-2}}$$

(müzōme Fetizōvad, ues +to pōr e')