9. cvičení - Funkce více proměnných - Implicitní funkce

Teorie

12. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která je parciálně spojitá, ale není spojitá.

    Řekneme, že f je parciálně spojitá, pokud pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $g(y) = f(x_0, y)$ spojitá na $\mathbb{R}$ (jakožto funkce 1 proměnné), a pro každé $y_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $h(x) = f(x, y_0)$ spojitá na $\mathbb{R}$.

    Řešení: Položme
    $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Pak na $\mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$ je f spojitá - podle aritmetiky a spojitosti.

    V počátku platí: $f(0,y) = 0$ a $f(x,0) = 0$, tedy je parciálně spojitá.

    Ale pro $f(x,x) = \frac{xx}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$, tedy f jako taková spojitá není.

13. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $[0,0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0,0)$, ale není v bodě $[0,0]$ spojitá.

    Řešení: Položme
    $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Derivace v počátku ve směru $v = (v_1, v_2)$ spočteme z definice
    $$D_v(f) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{tv_1(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

    Ale $f(x^2, x) = \frac{1}{2}$, tedy f není v $[0,0]$ spojitá.

    Jiný příklad: Nechť $f(x,y) = 1$, jestliže $y = x^2$, kde $x \neq 0$, v ostatních případech nechť je $f(x,y) = 0$.

    Pak funkce je v počátku nespojitá, ale všechny směrové derivace existují a jsou 0.

14. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $[0,0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0,0)$, ale neexistuje totální diferenciál $Df([0,0])$.

    Řešení: Jako předchozí příklad. Není-li totiž f spojitá, nemůže mít totální diferenciál.