Řešené úlohy

1a

Příklad 5.2.1. Prověřte diferencovatelnost funkce

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$$

v bodě $A = [-1, 1]$ a nalezněte její totální diferenciál v bodě A.

Řešení: Využijeme větu 5.2.3., spojité parciální derivace funkce f v bodě A zaručí diferencovatelnost funkce f v bodě A. Nejdříve vypočítáme parciální derivace funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y.$$

Tyto funkce jsou spojité na celém svém definičním oboru a tedy i v bodě A. Funkce f je diferencovatelná v bodě A.

Nalezneme totální diferenciál funkce f v bodě $A = [x_0, y_0] = [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2x - 2y)dx + (-2x - 6y)dy \\ df(A) &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A (y - y_0) \\ &= (2x - 2y)\Big|_{[-1,1]}(x + 1) + (-2x - 6y)\Big|_{[-1,1]}(y - 1) \\ &= -4(x + 1) - 4(y - 1) = -4x - 4y. \end{aligned}$$

Příklad 5.2.2. Vypočítejte přibližně $f(1,11; 0,58)$, je-li $f(x, y) = x^3 + 4y^3$.

Řešení: Budeme uvažovat bod $[1; 0,5]$, tj. $x_0 = 1$, $y_0 = 0,5$, $f(1; 0,5) = 1,5$. Vypočítáme totální diferenciál (přírůstek na tečné rovině k zadanému bodu) v tomto bodě, přičemž $dx = 0,11$, $dy = 0,08$. Využijeme-li následující vztah pro totální diferenciál

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy,$$

obdržíme

$$df(1;0,5) = (3x^2)\Big|_{[1;0,5]} \cdot 0,11 + (12y^2)\Big|_{[1;0,5]} \cdot 0,08$$
$$= 3 \cdot 0,11 + 12 \cdot 0,5^2 \cdot 0,08 = 0,57.$$

Využijeme vztah $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$, tedy

$$f(1,11;0,58) \approx f(1;0,5) + df(1;0,5) = 1,5 + 0,57 = 2,07.$$

Přesně je $f(1,11;0,58) = 2,148\,079$. Rozdíl mezi oběma výsledky je dán tím, že jsme v prvním případě uvažovali přírůstek funkce na tečné rovině.

Ještě poznamenejme, že pokud používáme desetinná čísla, pak je vhodné jednotlivé komponenty bodů od sebe oddělit středníkem.

Příklad 5.2.3. Nalezněte totální diferenciál funkce

1b

$$f(x,y) = \arctan\frac{x-y}{x+y}.$$

Řešení: Vypočítáme parciální derivace funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}\frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}\frac{2y}{(x+y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}\frac{-2x}{(x+y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Dosadíme do formule pro totální diferenciál, definice 5.2.2., a dostáváme

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x}{x^2+y^2}dy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

Příklad 5.2.4. Nalezněte rovnici tečné roviny a normály ke funkce

$$z = 2x^2 + y^2$$

v bodě $\boldsymbol{A} = [1, 1, ?]$.

funkce f v bodě P. V našem případě $P = [\frac{\pi}{2}, 1]$. Spočteme parciální derivace funkce f v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$, tj.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - y\sin x, & f_y(x,y) &= \cos x, \\ f_x(\tfrac{\pi}{2},1) &= \pi - 1, & f_y(\tfrac{\pi}{2},1) &= 0. \end{aligned}$$

Tyto funkce jsou spojité na celém svém definičním oboru, tedy i v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$. Funkce f je diferencovatelná v bodě $[\frac{\pi}{2}, 1]$.

Poznámka 4.15. Tento příklad lze také řešit pomocí definice 4.1, tj. ověříme, zda limita $\lim\limits_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-(\mathcal{A}h+\mathcal{B}k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, kde $f(x,y) = x^2 + y\cos x$ a $[x_0, y_0] = [\frac{\pi}{2}, 1]$.

Příklad 4.16. Pomocí totálního diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{3{,}01 \cdot 0{,}99}$.

Řešení. Označme $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$. Zvolme bod $[x_0, y_0] = [3, 1]$ a spočteme diference $h = x - x_0 = 0{,}01$, $k = y - y_0 = -0{,}01$. Pro výpočet použijeme vztah $f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k)$. V bodě $[3,1]$ a s diferencemi $h = 0{,}01$, $k = -0{,}01$ máme

$$f(3{,}01, 0{,}99) \doteq f(3,1) + \mathrm{d}f(3,1)(0{,}01, -0{,}01).$$

Ze vztahu (4.2) dostaneme

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}h + \frac{y}{2\sqrt{xy}}k,$$

$$\mathrm{d}f(3,1)(0{,}01,-0{,}01) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 0{,}01 + \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot (-0{,}01) = -\frac{1}{100\sqrt{3}}.$$

Pak dosazením do výše uvedeného vztahu dostáváme

$$\sqrt{3{,}01 \cdot 0{,}99} = f(3{,}01, 0{,}99) \doteq f(3,1) + \mathrm{d}f(3,1) = \sqrt{3} - \frac{1}{100\sqrt{3}} = \frac{299}{100\sqrt{3}}.$$

k **Příklad 4.17.** Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = xy\ln(x+y)$ v obecném bodě.

Řešení. Definičním oborem dané funkce je $\mathcal{D}f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > -y\}$. Spočteme první parciální derivace, tj.

$$f_x(x,y) = y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)y\ln(x+y) + xy}{x+y},$$

$$f_y(x,y) = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)x\ln(x+y)+xy}{x+y}.$$

Jelikož parciální derivace jsou spojité v každém bodě definičního oboru $\mathcal{D}f$, totální diferenciál existuje. Dosazením do vztahu (4.2) dostaneme

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = \frac{(x+y)y\ln(x+y)+xy}{x+y}h + \frac{(x+y)x\ln(x+y)+xy}{x+y}k.$$

Příklad 4.18. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y,z) = x^{y/z}$ v bodě $[2,1,1]$.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathcal{D}f = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x > 0, z \neq 0\}$. Funkce f má spojité parciální derivace prvního řádu v libovolném bodě svého definičního oboru, tudíž diferenciál existuje. Spočteme první parciální derivace a dosadíme bod $[2,1,1]$

$$f_x(x,y,z) = \frac{yx^{(y/z)-1}}{z}, \quad f_y(x,y,z) = \frac{x^{y/z}\ln x}{z}, \quad f_z(x,y,z) = -\frac{x^{y/z}y\ln x}{z^2},$$

$$f_x(2,1,1) = 1, \qquad f_y(2,1,1) = 2\ln 2, \qquad f_z(2,1,1) = -2\ln 2.$$

Totální diferenciál v bodě $[2,1,1]$ podle vzorce (4.8) je

$$\mathrm{d}f(2,1,1)(h_1,h_2,h_3) = h_1 + 2\ln 2\, h_2 - 2\ln 2\, h_3.$$

Příklad 4.19. Určete tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $f(x,y) = \ln\frac{1-x+y}{1+x+y}$ v bodě $[-1,1]$.

Řešení. Nejdříve dopočteme třetí souřadnici bodu T:

$$z_0 = f(x_0,y_0) = f(-1,1) = \ln 3.$$

Funkce je definována pro $\frac{1-x+y}{1+x+y} > 0$. Spočteme parciální derivace prvního řádu

$$f_x(x,y) = \frac{-2(y+1)}{(y+1)^2 - x^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2x}{(y+1)^2 - x^2}$$

a určíme jejich hodnoty v bodě $[-1,1]$

$$f_x(-1,1) = -\frac{4}{3}, \quad f_y(-1,1) = -\frac{2}{3}.$$

7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Úloha 2. **(a)** Určete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0,0)$ pro funkci

$$f(x,y) = |y| \sin x.$$

Stručnější řešení: 1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (absolutní hodnota ani funkce sinus nedávají žádné podmínky).

2. Parciální derivaci podle x v bodě $(0,0)$ lze určit přímým výpočtem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = (|y| \cos x)|_{(0,0)} = |0| \cos 0 = 0.$$

Parciální derivaci podle y v bodě $(0,0)$ kvůli absolutní hodnotě u y určíme raději z definice parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| \sin 0 - |0| \sin 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

3. Díky existenci parciálních derivací v bodě $(0,0)$ máme jediného kandidáta na totální diferenciál

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

Nevíme, zda jsou parciální derivace v bodě $(0,0)$ spojité, proto ověříme (nebo vyvrátíme), že o totální diferenciál skutečně jde pomocí jeho definice. Chceme tedy ukázat (nebo vyvrátit), že

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) \cdot (h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2\|} = 0.$$

Po dosazení na levou stranu a rozšířením h_1 dostaneme

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2| \sin h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin h_1}{h_1}}_{\to 1} \cdot \frac{h_1 |h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Protože podle AG-nerovnosti platí odhady:

$$0 \le \frac{|h_2 h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{\frac{h_1^2+h_2^2}{2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0,$$

podle věty o dvou policajtech vyplývá

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2 h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Protože i ve více proměnných platí, že $\lim f = 0$, právě když $\lim |f| = 0$, je tedy také

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2|h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 1\cdot 0 = 0,$$

a tedy funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál

$$\mathrm{d}f(0,0) = (0,0).$$

Podrobnější řešení: *1. Určíme definiční obor.* Absolutní hodnota ani funkce sinus nám nedávají žádné podmínky, definičním oborem je tedy celé $\mathbb{R}^2$.

$$D_f = \mathbb{R}^2.$$

2. Spočteme parciální derivace. Pro parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ na celém $\mathbb{R}^2$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(|y|\sin x\right) = |y|\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin x\right) = |y|\cos x,$$

speciálně tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = |0|\cos 0 = 0$.

Parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$ na celém $\mathbb{R}^2$ kvůli absolutní hodnotě takto jednoduše spočítat nelze. Proto je výhodnější rovnou počítat z definice v bodě $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|0+h|\sin 0 - |0|\sin 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

3. Určíme, zda funkce má či nemá totální diferenciál. Obě parciální derivace podle předchozího kroku existují. Jediným kandidátem na totální diferenciál je tedy (lineární zobrazení určené maticí 2×1)

$$\mathrm{d}f(0,0) \overset{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

Protože nevíme, zda je $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $(0,0)$ spojitá, zkusíme ověřit, zda se jedná o totální diferenciál funkce f v bodě $(0,0)$ pomocí definice totálního diferenciálu. Chceme tedy ověřit nebo vyvrátit, že

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2\|} = 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))\cdot(h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2|\sin h_1 - 0 - (0,0)\cdot(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2| \sin h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Nyní se můžeme zbavit sinu rozšířením h_1, neboť $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin h_1}{h_1} = 1$. Podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2| \sin h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin h_1}{h_1} \cdot \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Chceme ukázat, že limita výše je rovna nule. K tomu stačí ukázat, že i v absolutní hodnotě je limita rovna nule, tedy že

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left| \frac{h_1|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \stackrel{?}{=} 0.$$

Absolutní hodnotou jsme si zjednodušili práci, protože nyní můžeme použít odhad plynoucí z AG-nerovnosti, která platí pro nezáporná čísla:

$$|h_1 h_2| \leq \frac{h_1^2+h_2^2}{2},$$

a tudíž

$$0 \leq \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{2} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0.$$

Podle věty o dvou policajtech pro limitu funkce více proměnných je tedy

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0,$$

tedy podle předchozího postupu také

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) \cdot (h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2\|} = 0,$$

což podle definice totálního diferenciálu znamená, že $\mathrm{d}f(0,0) = (0,0)$. $\square$

Úloha 2. (b) Určcete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0,0)$ pro funkci

$$f(x,y) = \cos \sqrt[3]{xy}.$$

Řešení: 1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (funkce kosinus ani třetí odmocnina nedávají žádné podmínky).

2. Parciální derivace v bodě $(0,0)$ přímým výpočtem určit nelze, neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos \sqrt[3]{xy}) = -\sin(\sqrt[3]{xy}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} \cdot y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos \sqrt[3]{xy}) = -\sin(\sqrt[3]{xy}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} \cdot x,$$

kteréžto výrazy nejsou v bodě $(0,0)$ definované. Budeme tedy počítat z definice parciálních derivací.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos \sqrt[3]{(0+h)\cdot 0} - \cos \sqrt[3]{0\cdot 0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Obdobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos \sqrt[3]{0\cdot(0+h)} - \cos \sqrt[3]{0\cdot 0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) \cdot (h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\cos \sqrt[3]{(0+h_1)(0+h_2)} - 1 - (0,0)\cdot(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\cos \sqrt[3]{(h_1 h_2)} - 1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Pozor! Nyní si uvědomme, že pokud jdeme do nuly po přímkách $h_1 = 0$ nebo $h_2 = 0$, potom čitatel je nulový a limita rovna nule. V dalším tedy můžeme počítat limitu vzhledem k definičnímu oboru bez těchto os x a y, tedy vzhledem k množině

$$M := \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{ \{(-\infty,+\infty)\times\{0\}\} \cup \{\{0\}\times(-\infty,+\infty)\} \Big\}.$$

Pokud i limita vzhledem k množině M vyjde nula, pak i původní limita počítaná vzhledem k celému definičnímu oboru bude rovna nule.

Důvodem této pasáže je, že pro odstranění kosinu budeme potřebovat rozšířit, a na osách by toto rozšíření selhalo.

Počítáme tedy nyní

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)_{(h_1,h_2)\in M}} \frac{\cos \sqrt[3]{(h_1 h_2)} - 1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

po rozšíření dostaneme

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)_{(h_1,h_2)\in M}} \underbrace{\frac{\cos\sqrt[3]{(h_1h_2)}-1}{\sqrt[3]{(h_1h_2)^2}}}_{\to -1/2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(h_1h_2)^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

První limita je rovna minus jedné polovině podle jednorozměrné limity $\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-1}{z^2} = -\frac{1}{2}$ a věty o limitě složené funkce pro limity více proměnných, varianty (P), neboť existuje prstencové okolí P bodu $(0,0)$, pro které na $P\cap M$ je $0 < (h_1h_2)^2 < 2\pi$, a tedy $\cos\sqrt[3]{(h_1h_2)^2} \neq 1$. **Zde je právě důležité z množiny M vyloučit osy x a y.**

Podle AG-nerovnosti je pak $\sqrt[3]{(h_1h_2)^2} \leq (h_1^2+h_2^2)^{2/3}/\sqrt[3]{4}$, a tedy platí odhady

$$0 \leq \frac{\sqrt[3]{(h_1h_2)^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(h_1^2+h_2^2)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0.$$

Podle věty o dvou policajtech je tedy hledaná limita skutečně rovna nule (vzhledem k M; předtím jsme totéž ukázali i vůči ose x a ose y. Tedy to platí i vůči celému D_f), a tudíž funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál $\mathrm{d}f(0,0) = (0,0)$. □

Úloha 2. (c) Určcete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0,0)$ pro funkci

$$f(x,y) = \sqrt{|x|^3+|y|^3}.$$

Řešení: 1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (třetí odmocnina ani absolutní hodnota nedávají žádné podmínky).

2. Parciální derivace v bodě $(0,0)$ spočteme z definice. Počítáme-li naráz jednostranné limity zleva i zprava, dostáváme:

$$\lim_{h\to 0\pm}\frac{\sqrt{|0+h|^3+|0|^3}}{h} = \lim_{h\to 0\pm}\frac{|h|^{3/2}}{h} = \lim_{h\to 0\pm}\frac{|h|}{h}\cdot\lim_{h\to 0\pm}|h|^{1/2} = \pm 1\cdot 0 = 0.$$

Obě jednostranné limity jsou si rovny, existuje tedy oboustranná. Z definice existuje tedy i parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|0+h|^3+|0|^3}}{h} = 0.$$

Analogicky pro $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\lim_{h\to 0\pm}\frac{\sqrt{|0|^3+|0+h|^3}}{h} = \lim_{h\to 0\pm}\frac{|h|^{3/2}}{h} = 0.$$

Opět, obě jednostranné limity jsou si rovny, existuje tedy oboustranná. Z definice existuje tedy i parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ a je $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) \cdot (h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|0+h_1|^3 + |0+h_2|^3} - 0 - (0,0)\cdot(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h_1|^3+|h_2|^3}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Nyní platí odhady:

$$0 \le \frac{\sqrt{|h_1|^3+|h_2|^3}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{\sqrt{(|h_1|+|h_2|)(|h_1|^2+|h_2|^2)}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \sqrt{|h_1|+|h_2|} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0.$$

Podle věty o dvou policajtech je tedy hledaná limita rovne nule, a tudíž funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál $\mathrm{d}f(0,0) = (0,0)$. □

Úloha 2. (d) Určcete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0,0)$ pro funkci

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy}.$$

Řešení: 1. $D_f = \mathbb{R}^2$.

2. Spočteme parciální derivace v bodě $(0,0)$. Budeme počítat z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{(0+h)0} - \sqrt[3]{0\cdot 0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

Analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) \cdot (h_1,h_2)^T}{\|(h_1,h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_1h_2} - 0 - (0,0)\cdot(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_1h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Tato limita ovšem neexistuje. Pro přímku $h_1 = 0$ máme

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{0\cdot h_2}}{\sqrt{0^2+h_2^2}} = 0,$$

zatímco pro přímku $h_1 = h_2$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_2\cdot h_2}}{\sqrt{h_2^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{|h_2|}} = \infty.$$

Závěr: Totální diferenciál neexistuje.

Úloha 2. (e) Určete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0,0)$ pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Řešení: 1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (zlomek v sinu dává podmínku $x^2+y^2\neq 0$, první výraz je tedy korektně definován všude kromě počátku; v počátku je však funkce dodefinována druhým řádkem).

Vsuvka: Není nutné ověřovat spojitost f v bodě $(0,0)$. Přesto se může hodit se nad tím zamyslet, neboť funkce, která není v bodě spojitá, nemůže mít v tomto bodě totální diferenciál.

Funkce f nicméně v bodě $(0,0)$ spojitá je. Plyne to z věty o dvou policajtech a jednoduchého odhadu

$$-(x^2+y^2) \le f(x,y) \le (x^+y^2),$$

přičemž levá i pravá strana konvergují do nuly pro $(x,y)\to(0,0)$.

2. Spočteme parciální derivace v bodě $(0,0)$. Protože bod $(0,0)$ je od pohledu problematický, budeme počítat z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(h^2+0^2)\sin\frac{1}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to0} h\sin\frac{1}{h^2} = 0,$$

podle věty o omezené krát nulové posloupnosti. Obdobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(0^2+h^2)\sin\frac{1}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to0} h\sin\frac{1}{h^2} = 0.$$

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$\mathrm{d}f(0,0) \stackrel{?}{=} (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1^2 + h_2^2) \sin \frac{1}{h_1^2+h_2^2} - 0 - (0,0) \cdot (h_1, h_2)^T}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} = 0$$

opět podle věty o limitě omezené krát nulové posloupnosti (ovšem tentokrát pro funkce více proměnných). Tudíž funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál $\mathrm{d}f(0,0) = (0,0)$. $\square$

Dodatek nepotřebný pro řešení úlohy: Funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál, přestože parciální derivace jsou v tomto bodě nespojité.

Máme totiž např., že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Aby byla parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ v bodě $(0,0)$ spojitá, muselo by platit, že (dvojná) limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. To ale není pravda, tato limita totiž neexistuje. Jděme např. do bodu $(0,0)$ po přímce $y = x$, tj. počítejme limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(2 \sin 12h^2 - \frac{1}{h} \cos 1h^2 \right).$$

Limita napravo zjevně neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial x}$ tedy nemůže být spojitá v bodě $(0,0)$. Dokázat lze například z Heineho věty. Pokud volíme například posloupnost $h_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, potom $\cos \frac{1}{h^2} = \cos(2\pi n) = 1$, $\sin \frac{1}{2h^2} = \sin(\pi n) = 0$, a tedy $\lim \frac{\partial f}{\partial x}(h_n, h_n) = -\infty$. Naopak, volíme-li $h_n = \frac{1}{\sqrt{\pi+2\pi n}}$, pak $\cos \frac{1}{h^2} = \cos(\pi + 2\pi n) = -1$, $\sin \frac{1}{2h^2} = \sin(\pi/2 + \pi n) = 0$, a tedy $\lim \frac{\partial f}{\partial x}(h_n, h_n) = +\infty$.

Nutnou podmínku pro existenci totálního diferenciálu, která může ulehčit důkaz neexistence diferenciálu, dává tvrzení:

Existuje-li totální diferenciál reálné funkce n proměnných f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pak je f v bodě a spojitá.

3 P ř í k l a d Dodefinujte funkci $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

Řešení. Pro $(x,y) \in G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je funkce definovaná a snadno spočteme její parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2+y^2)-x^3y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

To jsou spojité funkce dvou proměnných na G, neboť jsou to racionální funkce na svém definičním oboru. Proto má funkce f na G totální diferenciál, přičemž ten je v bodě $(x,y) \in G$ zobrazením

$$df(x,y)\colon (h_1,h_2) \mapsto \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_1 + \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_2.$$

Má-li být f rozšířena na $\mathbb{R}^2$ tak, aby měla totální diferenciál, musí být rozšířena spojitě. Protože $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 0$, je nutnou podmínkou pro takové rozšíření, že $f(0,0) = 0$. Dodefinujeme proto f v počátku nulou a uvažujeme, zda má totální diferenciál v počátku. Protože nyní máme $f(x,0) = f(0,y) = 0$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, jsou obě parciální derivace funkce f v počátku nulové z definice. Existuje-li totální diferenciál, musí platit, že $df(0,0)\colon (h_1,h_2) \mapsto 0$, tedy, že je to nulová lineární forma. Ověříme, že ta je totálním diferenciálem f v počátku podle definice:

Položme

$$\varepsilon(h_1,h_2) = \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - d_{(h_1,h_2)}f(0,0)|}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{|h_1^2h_1h_2|}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq$$

$$\leq \frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2}\,\frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \|(h_1,h_2)\|.$$

Je tedy $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ a totální diferenciál f v počátku je roven nulové formě dle definice. ■

P ř í k l a d Vyšetřete, zda funkci $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\log(1+xy)$ lze dodefinovat na nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla totální diferenciál.

Řešení. Protože funkce xy je spojitá v počátku a má v něm hodnotu nula, je na nějakém okolí počátku její hodnota větší než -1 a funkce f je na příslušném prstencovém okolí počátku definovaná.

Má-li funkce mít totální diferenciál v počátku, musí v něm být dokonce spojitá. Protože $f(0,y) = 0$ pro všechna $y \neq 0$, je jedinou možností, jak dodefinovat f v počátku, položit $f(0,0) = 0$.

Protože nyní je $f(0,y) = f(x,0) = 0$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, tak parciální derivace v počátku jsou nulové. Jediným možným kandidátem na totální diferenciál v počátku je tedy nulová lineární forma na $\mathbb{R}^2$. Je-li skutečně totálním diferenciálem,

5 Totální diferenciál

Definice 5.1. *Funkce f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineární zobrazení* $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$*, pro které platí*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)[h]}{\|h\|} = 0\,.$$

Jinými slovy platí

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)[h] + \omega(h)\,, \quad \text{kde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0\,.$$

Zatímco parciální derivace charakterizuje změnu funkce pouze v určitém směru, totální diferenciál nám něco říká o chování funkce pro všechny malé přírůstky h. Jeho interpretace je nahrazení funkce tečnou rovinou ke grafu funkce v daném bodě. Pokud má funkce v nějakém bodě spojité parciální derivace, pak tam má diferenciál. Platí následující věta.

Věta 5.2. *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ v bodě a totální diferenciál. Pak je v bodě a spojitá, má v něm parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných a platí* $\mathrm{d}f(a)[h] = \sum_{i=1}^{r} h_i \partial_{x_i} f$.

Příklad 5.3. *Najděte totální diferenciál funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě (x_0, y_0).*

Řešení: Nejdříve vypočteme parciální derivace podle obou proměnných v bodě (x_0, y_0).

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 2x_0\,, \quad \partial_y f(x_0, y_0) = 2y_0\,.$$

Pokud totální diferenciál existuje, má tedy tvar $2x_0 h_1 + 2y_0 h_2$.

$$\begin{aligned} \omega(h) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \mathrm{d}f(x_0, y_0)[h] = \\ = (x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0 h_1 - 2y_0 h_2 = h_1^2 + h_2^2\,. \end{aligned}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \|h\| = 0\,.$$

Totálním diferenciálem funkce f v bodě (x_0, y_0) tedy je $2x_0 h_1 + 2y_0 h_2$.

4) * **Příklad 5.4.** *Určete, zda funkce* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *má v počátku totální diferenciál.*

Řešení: Protože funkci nelze v počátku derivovat (nemá tam smysl), vypočítáme derivace přímo z definice

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0\,,$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0\,.$$

* Pro spojitost $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x) = 0$

(vizte 4. cvičení)

Totální diferenciál tedy je

$$\mathrm{d}f(0,0)[h] = \partial_x f(0,0)h_1 + \partial_y f(0,0)h_2 = 0h_1 + 0h_2 = 0\,.$$

Nyní ověříme, jestli tento kandidát je skutečně diferenciálem.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathrm{d}f(0,0)[h]}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} \neq 0\,.$$

Protože limita neexistuje, neexistuje ani totální diferenciál v tomto bodě.

Příklad 5.5. *Zjistěte, kde je funkce* $f(x,y) = \ln(x+y)$ *definovaná, spojitá, kde má parciální derivace 1. řádu a kde totální diferenciál.*

Řešení: Funkce je definovaná na polorovině $x + y > 0$. V celé této polorovině je spojitá a má parciální derivace 1. řádu

$$\partial_x f = \partial_y f = \frac{1}{x+y}\,,$$

které jsou zjevně spojité v celé polorovině. Protože jsou parciální derivace spojité, má funkce totální diferenciál.

6 Taylorův rozvoj

Obdobně jako v jedné proměnné můžeme ve více proměnných vyjádřit hladkou funkci Taylorovým rozvojem. Má-li funkce f jako funkce n proměnných spojité parciální derivace až do řádu $(k+1)$ včetně na okolí bodu $a = (a_1, \ldots, a_n)$, platí na jeho okolí

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^j f(a) + R_{k+1}(x)\,,$$

kde

$$R_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!} \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{k+1} f(a + \delta(x-a))\,,$$

$\delta \in (0,1)$.

7 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 7.1. *Ukažte, že pro funkci* $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ *platí:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

a přitom limita funkce dvou proměnných $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *neexistuje.*

Nutnou podmínku pro existenci totálního diferenciálu, která může ulehčit důkaz neexistence diferenciálu, dává tvrzení:

Existuje-li totální diferenciál reálné funkce n proměnných f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pak je f v bodě a spojitá.

<u>Příklad</u> Dodefinujte funkci $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

Řešení. Pro $(x,y) \in G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je funkce definovaná a snadno spočteme její parciální derivace:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2+y^2)-x^3y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

To jsou spojité funkce dvou proměnných na G, neboť jsou to racionální funkce na svém definičním oboru. Proto má funkce f na G totální diferenciál, přičemž ten je v bodě $(x,y) \in G$ zobrazením

$df(x,y)\colon (h_1,h_2) \mapsto \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_1 + \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_2$.

Má-li být f rozšířena na $\mathbb{R}^2$ tak, aby měla totální diferenciál, musí být rozšířena spojitě. Protože $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 0$, je nutnou podmínkou pro takové rozšíření, že $f(0,0) = 0$. Dodefinujeme proto f v počátku nulou a uvažujeme, zda má totální diferenciál v počátku. Protože nyní máme $f(x,0) = f(0,y) = 0$ pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$, jsou obě parciální derivace funkce f v počátku nulové z definice. Existuje-li totální diferenciál, musí platit, že $df(0,0)\colon (h_1,h_2) \mapsto 0$, tedy, že je to nulová lineární forma. Ověříme, že ta je totálním diferenciálem f v počátku podle definice:

Položme

$$\varepsilon(h_1,h_2) = \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - d_{(h_1,h_2)}f(0,0)|}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{|h_1^2h_1h_2|}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le$$

$$\le \frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2}\frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \|(h_1,h_2)\|.$$

Je tedy $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ a totální diferenciál f v počátku je roven nulové formě dle definice. ■

<u>Příklad</u> Vyšetřete, zda funkci $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\log(1+xy)$ lze dodefinovat na nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla totální diferenciál.

Řešení. Protože funkce xy je spojitá v počátku a má v něm hodnotu nula, je na nějakém okolí počátku její hodnota větší než -1 a funkce f je na příslušném prstencovém okolí počátku definovaná.

Má-li funkce mít totální diferenciál v počátku, musí v něm být dokonce spojitá. Protože $f(0,y) = 0$ pro všechna $y \neq 0$, je jedinou možností, jak dodefinovat f v počátku, položit $f(0,0) = 0$.

Protože nyní je $f(0,y) = f(x,0) = 0$ pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$, tak parciální derivace v počátku jsou nulové. Jediným možným kandidátem na totální diferenciál v počátku je tedy nulová lineární forma na $\mathbb{R}^2$. Je-li skutečně totálním diferenciálem, pak podle definice musí platit, že $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. Složíme-li ovšem zkoumanou funkci proměnných h_1, h_2 v prstencovém okolí počátku s funkcí $t \mapsto (t,t)$, pak zjistíme, že limita pro $t \to 0_+$ je rovna $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a to je ve sporu s větou o limitě složené funkce.

(Poznamenejme, že pokud bychom vyšetřovali napřed parciální derivace funkce f v okolí počátku, pak bychom po jistém úsilí s jejich výpočtem a se zkoumáním limity zjistili, že nejsou v počátku spojité. Neexistenci limity bychom mohli dokázat též zkoumáním „po osách“a „po diagonále“, tedy skládáním s $t \mapsto (t,0)$, $t \mapsto (0,t)$ a $t \mapsto (t,t)$. Tím bychom ovšem dospěli k tomu, že tato cesta k cíli nevede a pak bychom jistě přistoupili ke zkoumání diferenciálu podle definice jako výše. Protože funkci f lze spojitě dodefinovat nulou v počátku, nelze nutnou podmínku spojitosti užít k vyvrácení existence diferenciálu v tomto případě. Je proto dobré získat cit pro to, kterému postupu dát přednost, abychom aspoň nad jednoduššími příklady neztráceli příliš mnoho času.) ■

§55. Derivace ve směru. K výpočtu derivace ve směru je často výhodné užít totální diferenciál, pokud existuje:

Existuje-li totální diferenciál $df(a)$ funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, pak derivace ve směru $h \in \mathbb{R}^n$ ($\partial_h f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$) je rovna hodnotě $d_h f(a)$ tohoto diferenciálu v h. Poznamenejme, že geometrické představě směru odpovídají jen nenulová h a že někdy se o derivaci ve směru mluví jen v případě, že $\|h\| = 1$.

<u>Příklad</u> Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ v bodě $(1,1)$ ve směru $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

Řešení. Parciální derivace jsou $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+x^2y^2}$. To jsou funkce dvou proměnných, které jsou spojité na $\mathbb{R}^2$, speciálně jsou spojité v bodě $(1,1)$. Funkce f má tedy totální diferenciál v bodě $(1,1)$ a derivace f v bodě $(1,1)$ ve směru $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ je rovna hodnotě totálního diferenciálu $df(1,1)$ v bodě $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, tedy je rovna $\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. ■

§56. Tečná nadrovina. Existuje-li totální diferenciál reálné funkce více proměnných, můžeme mluvit o tečné nadrovině k jejímu grafu:

Má-li funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ totální diferenciál v bodě a, pak graf zobrazení $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(a) + d_{x-a}f(a)$, (t.j. množina

$$(a, f(a)) + L = \{(a, f(a)) + (\xi, \eta) \colon a \in \mathbb{R}^n,\ (\xi,\eta) \in L\},$$

kde L je graf zobrazení $df(a)$) je tečnou nadrovinou ke grafu f v bodě $(a, f(a))$.

<u>Příklad</u> Nechť T je tečná rovina ke grafu funkce $p(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$, která je kolmá k přímce $\{(t,t,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T „osu x“(t.j. přímku $\{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$)?

5 Totální diferenciál

Definice 5.1. *Funkce f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineární zobrazení* $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$*, pro které platí*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)[h]}{\|h\|} = 0 \,.$$

Jinými slovy platí

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)[h] + \omega(h) \,, \quad \text{kde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0 \,.$$

Zatímco parciální derivace charakterizuje změnu funkce pouze v určitém směru, totální diferenciál nám něco říká o chování funkce pro všechny malé přírůstky h. Jeho interpretace je nahrazení funkce tečnou rovinou ke grafu funkce v daném bodě. Pokud má funkce v nějakém bodě spojité parciální derivace, pak tam má diferenciál. Platí následující věta.

Věta 5.2. *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ v bodě a totální diferenciál. Pak je v bodě a spojitá, má v něm parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných a platí* $\mathrm{d}f(a)[h] = \sum_{i=1}^{r} h_i \partial_{x_i} f$.

6 **Příklad 5.3.** *Najděte totální diferenciál funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě (x_0, y_0).*

Řešení: Nejdříve vypočteme parciální derivace podle obou proměnných v bodě (x_0, y_0).

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 2x_0 \,, \quad \partial_y f(x_0, y_0) = 2y_0 \,.$$

Pokud totální diferenciál existuje, má tedy tvar $2x_0 h_1 + 2y_0 h_2$.

$$\begin{aligned} \omega(h) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \mathrm{d}f(x_0, y_0)[h] = \\ = (x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0 h_1 - 2y_0 h_2 = h_1^2 + h_2^2 \,. \end{aligned}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \|h\| = 0 \,.$$

Totálním diferenciálem funkce f v bodě (x_0, y_0) tedy je $2x_0 h_1 + 2y_0 h_2$.

Příklad 5.4. *Určete, zda funkce* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *má v počátku totální diferenciál.*

Řešení: Protože funkci nelze v počátku derivovat (nemá tam smysl), vypočítáme derivace přímo z definice

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0 \,,$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0 \,.$$