$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 8 & -103 & -134 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 54, \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Matice A má hodnost 5, a je tedy regulární. Proto platí $\det A \neq 0$.

1a

Příklad B2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech, kde $y^2 \neq x^2$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2y.$$

V bodech, kde $y^2 = x^2$, zkusme počítat parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle definice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|(x+t)^2 - y^2|}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|2xt + t^2|}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}|2x+t|. \end{aligned}$$

Poslední limita existuje, jen když $x = 0$, a je rovna nule. Vzhledem k symetrii funkce f ($f(x,y) = f(y,x)$) totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 3 - 2 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-2).$$

Příklad B3 : Položme

$$F(x,y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

b

Příklad D2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y]$, kde $xy \neq 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků":

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2-y} \cdot 2x + \operatorname{sgn}(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x^2-y} + 7 + \operatorname{sgn}(xy) \cdot x.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $xy = 0$. Z věty o aritmetice limit plyne, že funkce f má parciální derivaci podle x (resp. podle y) v bodě $[x,y]$ právě tehdy, když ji tam má funkce $g : [x,y] \to |xy|$ (je totiž $f - g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$). Počítejme derivace funkce g v bodech $[x,0]$, $x \in \mathbb{R}$, a $[0,y]$, $y \in \mathbb{R}$, podle definice:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x+t,0) - g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x,t) - g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|xt|}{t} = \lim_{t\to 0} |x| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $x = 0$, a v tomto případě je nulová.

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,y+t) - g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,y) - g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|ty|}{t} = \lim_{t\to 0} |y| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $y = 0$, a v tomto případě je nulová.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,y];\ y \in \mathbb{R},\ y \neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,0];\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1/e + 16 + (2/e + 2) \cdot (x-1) + (8 - 1/e) \cdot (y-2).$$

Příklad D3 : Položme

$$F(x,y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1+y^2} + x.$$

e

Příklad A2 : Funkce f je definována na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \sin x + y \geq 0\}$. V bodech, kde $y + \sin x > 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}}.$$

natreslete si D_f

V bodech kde $y + \sin x = 0$ nemůže parciální derivace f podle y existovat. Parciální derivace podle x může existovat jen v bodech tvaru $[3\pi/2 + 2k\pi, 1]$, $k \in \mathbb{Z}$. Zkusme počítat podle definice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(3\pi/2 + 2k\pi, 1) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(3\pi/2 + 2k\pi + t, 1) - f(3\pi/2 + 2k\pi, 1)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(3\pi/2 + 2k\pi + t)}}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t}.
\end{aligned}$$

Poslední limita neexistuje protože limita zleva $(-1/\sqrt{2})$ se nerovná limitě zprava $(1/\sqrt{2})$. Parciální derivace funkce f existují pouze na vnitřku množiny M a jsou tam spojité. Proto v bodě $[0, 1]$ existuje totální diferenciál, a tedy tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (y - 1).$$

Příklad A3 : Položme

$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \cos(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(\pi, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) = 1,$$
$$\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) = 0,$$
$$- \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$- \cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) = 0.$$

'd

Příklad E2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro funkci f platí:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{pro } x^2+y^2 \le 1; \\ 2-x^2-y^2 & \text{pro } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

V bodech $[x,y]$, kde $x^2+y^2 \ne 1$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků":

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2x & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{pro } x^2+y^2 < 1; \\ -2y & \text{pro } x^2+y^2 > 1; \end{cases}.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $x^2+y^2=1$. Uvažujme bod $[x_0,y_0]$ takový, že $x_0^2+y_0^2=1$. Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{(x_0+t)^2+y_0^2, 2-(x_0+t)^2-y_0^2\}-1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{1+2x_0t+t^2, 1-2x_0t-t^2\}-1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\min\{2x_0t+t^2, -2x_0t-t^2\}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} -|2x_0t+t^2|/t = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 = 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x_0 \ne 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii funkce f lze parciální derivaci podle y počítat analogicky.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ x\ne 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y];\ x^2+y^2=1,\ y\ne 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -3 - 2\cdot(x-1) - 4\cdot(y-2).$$

Příklad E3 : Položme

$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$, která obsahuje bod $[1,1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

e

Příklad C2 : Funkce f je definována na množině $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ y>0\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x<0,\ y<0\}$. V bodech $[x,y] \in \mathcal{D}(f)$, kde $x \neq y$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{3}\left(\log\frac{x}{y}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{y}$$

V bodech z definičního oboru, kde $y = x$, zkusme počítat parciální derivace podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,x)-f(x,x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{x+t}{x}\right)}}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}}\cdot\frac{\frac{t}{x}}{t^3}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x>0,\\ -\infty & \text{pro } x<0;\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(y,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(y,y+t)-f(y,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\log\left(\frac{y}{y+t}\right)}}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} -\sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{y}\right)}{\frac{t}{y}}\cdot\frac{\frac{t}{y}}{t^3}} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } y>0,\\ +\infty & \text{pro } y<0.\end{cases}\end{aligned}$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -\sqrt[3]{\log 2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}}\cdot(x-1) - \frac{1}{6}\frac{1}{(\log 2)^{\frac{2}{3}}}\cdot(y-2).$$

Příklad C3 : Položme

$$F(x,y) = \log(x^2+y^2+\cos(xy)) + y.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbb{R}^2$) obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)}\cdot(2x - \sin(xy)\cdot y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+\cos(xy)}\cdot(2y - \sin(xy)\cdot x) + 1.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje

Pokud $x \neq 0$, je hodnost matice rovna 3. V případě, že $x = 0$, je hodnost matice A rovna 2.

Příklad F2 : Funkce f je definována na $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Pro funkci f platí:

$$f(x, y) = \exp(y^x \log x).$$

V bodech $[x, y] \in \mathcal{D}(f)$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \exp(y^x \log x) \cdot \left(y^x \cdot \log y \cdot \log x + y^x \cdot \frac{1}{x} \right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \exp(y^x \log x) \cdot \left(x y^{x-1} \cdot \log x \right).$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + 2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2).$$

Příklad F3 : Položme

$$F(x, y) = y^3 x^2 + y^2 x^2 + \sin y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2y^3 x + 2y^2 x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 x^2 + 2y x^2 + \cos y.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3 x^2 + \varphi(x)^2 x^2 + \sin \varphi(x) = 0.$$

Postupně obdržíme

$$3\varphi(x)^2 \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^3 x + 2\varphi(x)\varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^2 x + \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0,$$
$$6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x) x^2 + 3\varphi(x)^2 \varphi''(x) x^2 + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x$$
$$+ 2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x)\varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) x^2 + 4\varphi(x)\varphi'(x) x$$
$$+ 4\varphi(x)\varphi'(x) x + 2\varphi(x)^2 - \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\varphi'(x) + \cos \varphi(x) \cdot \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 17 & 4 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 11 & 26 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Platí tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & 3 & 4 \\ -7 & -17 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9

Příklad G2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x, y] \neq [0, 0]$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků":

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

V bodě $[0, 0]$ spočítáme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(\operatorname{arctg}(\sqrt{t^2}))^4}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(|t|)}{|t|} \right)^4 \cdot \frac{|t|^4}{t} = 0.$$

Vzhledem k symetrii funkce f platí také $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = (\operatorname{arctg} \sqrt{5})^4 + \frac{2}{3}(\operatorname{arctg} \sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x - 1) + \frac{4}{3}(\operatorname{arctg} \sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (y - 2).$$

Příklad G3 : Položme

$$F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Pokud $x = 2$, pak $h(A) = 3$. V případě, že $x \neq 2$, pak lze číslem $x - 2$ dělit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{x-1}{x-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek je nulový, právě když $\frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} = 0$, tj. právě když $x = 7$.

Závěr: $h(A) = 2$ pro $x = 7$, $h(A) = 3$ pro $x \neq 7$.

Příklad H2 : Okamžitě vidíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Pokud $x \neq 0$ lze v bodě $[x, y]$ počítat parciální derivace „podle vzorečků“.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \cos(x\cos y) \cdot \cos y & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot \sin y & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \cos(x\cos y) \cdot (-x\sin y) & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot (x\cos y) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V bodech tvaru $[0, y]$ budeme počítat parciální derivace „z definice“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y) - f(t,0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,y)}{t}$$

Tato limita ovšem neexistuje, protože limita zleva $(-\infty)$ se nerovná limitě zprava $(\cos y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{t\to y} \frac{f(0,t) - f(0,y)}{t - y} = \lim_{t\to y} \frac{0}{t-y} = 0.$$

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité, a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \cos(\cos 2) \cdot \cos 2 \cdot (x - 1) - \cos(\cos 2) \cdot \sin 2 \cdot (y - 2) + \sin(\cos 2).$$

Příklad H3 : Položme

$$F(x,y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}.$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno spočteme: $x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -3.$

Příklad I2 : Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x+y=1\}$. Pro parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy - x - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy - x^2 - y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\}.$$

V bodě $[0,0]$ počítejme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{t^2}}{t-1}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{(t-1)t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sgn} t}{t-1}.$$

Poslední limita neexistuje, protože limita zleva je rovna 1 a zprava je rovna -1. To znamená, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje. Naprosto stejným postupem lze ukázat, že ani $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje.

V bodě $[1,2]$ jsou obě parciální derivace spojité a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \frac{-3}{4\sqrt{5}} \cdot (x-1) - \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot (y-2) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Příklad I3 : Položme

$$F(x,y) = \operatorname{arctg}(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}y - \sin x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y+x}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy

2

3. Funkce $f(x,y)$ definovaná v $\mathbb{R}^2$ předpisem $f(x,y) := 1$, je-li y racionální, a $f(x,y) := 0$, je-li y iracionální, má parciální derivaci podle x rovnou 0 všude v $\mathbb{R}^2$, zatímco její parciální derivace podle y neexistuje nikde. □

Definice. Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ a nechť $a \in \mathbb{R}^p$; říkáme, že lineární forma $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ je **diferenciál funkce f v bodě** a, je-li

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0. \tag{22}$$

Tento diferenciál (tedy formu L) budeme značit $Df(a)$, jeho hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^p$ (tj. q-rozměrný vektor $L(h)$) zapíšeme ve tvaru $Df(a;h)$. Existuje-li $Df(a)$, říkáme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a. □

Je zřejmé, že *funkce $f = (f_1, \ldots, f_q)$ je diferencovatelná v bodě a, právě když jsou v bodě a diferencovatelné všechny funkce f_j, kde $j = 1, \ldots, q$; je-li podmínka splněna, je*

$$Df(a) = (Df_1(a), \ldots, Df_q(a)). \quad \square \tag{23}$$

Poznámka 14.7. Jak je dobře známo z algebry, existuje pro každou lineární formu $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ právě jedna matice

$$\Lambda = (\lambda_{ji})_{1\le j\le q,\, 1\le i\le p} \tag{24}$$

typu $q \times p$ tak, že rovnost $y = L(x)$ je ekvivalentní s maticovou rovností

$$y = \Lambda x, \tag{25}$$

kde vpravo je maticový součin matice Λ s vektorem x, který je třeba v této souvislosti považovat za vektor *sloupcový*, tedy za matici typu $p \times 1$; vlevo je sloupcový vektor y, tentokrát ovšem matice typu $q \times 1$. (Chceme-li zdůraznit, že y a x jsou sloupcové vektory, můžeme psát např. $y^{sl} = \Lambda x^{sl}$.)

Rovnost (25) lze podrobněji napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{q1} & \lambda_{q2} & \ldots & \lambda_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix}, \tag{25'}$$

což je ekvivalentní se zápisem

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1p}x_p, \\ y_2 &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2p}x_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_q &= \lambda_{q1}x_1 + \lambda_{q2}x_2 + \ldots + \lambda_{qp}x_p. \end{aligned} \tag{26}$$

3

Řešení. Totální diferenciál funkce p v libovolném bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existuje, protože parciální derivace $\frac{\partial p}{\partial x}(x, y) = -2x + 2$ a $\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = -2y + 4$, a to jsou spojité funkce dvou proměnných. Tečná rovina ke grafu funkce p v bodě $(x_0, y_0, p(x_0, y_0))$ je tedy

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2,\\ z = p(x_0, y_0) + (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y + 4)(y - y_0)\}.$$

Má-li být kolmá k (násobkům) vektoru $(1, 1, 1)$, musí být vektor

$$(x - x_0, y - y_0, (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y_0 + 4)(y - y_0))$$

kolmý k $(1, 1, 1)$ pro každá $x, y \in \mathbb{R}^2$. Skalární součin těchto vektorů

$$x - x_0 + y - y_0 + (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y + 4)(y - y_0)$$

musí být roven nule pro každá $x, y \in \mathbb{R}$. Musí být tedy $3 - 2x_0 = 5 - 2y_0 = 0$. Máme tedy $T = \{(x, y, p(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) - (x - \frac{3}{2}) - (y - \frac{5}{2}))\colon x, y \in \mathbb{R}\}$. Položíme-li $x = y = 0$, dostáváme, že hledaný bod na ose z je $(0, 0, \cancel{\frac{17}{2}})$. ■

1/2 9/2

§57. Druhý diferenciál a konvexita. Druhým diferenciálem funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě a se v moderní literatuře obvykle rozumí symetrická bilineární forma $d^2 f(a)$, pro kterou platí $d^2 f(a)(s, t) = d_t(d_s f)(a)$ pro libovolná $s, t \in \mathbb{R}^n$. Při zkoumání vlastností funkce f nás bude zajímat především kvadratická forma $h \mapsto d^2 f(a)(h, h)$, která ovšem jednoznačně určuje symetrickou bilineární formu druhého diferenciálu, a proto nedojdeme ke špatným výsledkům, i když budeme za druhý diferenciál považovat tuto kvadratickou formu (jak tomu je např. v [DII]). Navíc si připomeňme, že (odpovídající) kvadratická či bilineární forma druhého diferenciálu je určena symetrickou čtvercovou (Hessovou) maticí druhých parciálních derivací $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))_{i,j=1,\ldots,n}$[2] a že druhý diferenciál v a existuje, pokud jsou všechny druhé parciální derivace spojité na nějakém okolí bodu a.

Ani libovolně hladké funkce více proměnných, na rozdíl od funkcí jedné proměnné, nemusí být konvexní ani konkávní na žádné otevřené konvexní podmnožině definičního oboru (např. $f(x, y) = x^2 - y^2$). Pro reálnou funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která má spojité druhé parciální derivace na otevřené podmnožině $\mathbb{R}^n$ tedy může mít množina bodů a, ve kterých je f „lokálně konvexní (konkávní)" (existuje otevřená koule se středem a, na které je f konvexní (konkávní)) doplněk s neprázdným vnitřkem. Vyšetřování („lokální") konvexity (konkávnosti) se nám ovšem bude hodit při hledání lokálních extrémů a absolutních extrémů funkcí. Platí následující postačující podmínky:

[2]Užíváme klasické značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$. Často se můžete setkat s obráceným značením. V případě Hessovy matice to ovšem díky její symetrii nehraje roli.