6. cvičení - Funkce více proměnných - parciální derivace

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Parciální derivací funkce f v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i definujeme jako limitu*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Definice 2. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. Pak graf funkce

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Věta 3. Nechť je funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0; y_0]$. Pak v bodě $[x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$ existuje tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ určená rovnicí

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Algoritmus - jak upočítat parciální derivace funkce $f(x, y)$

1. Určíme **definiční obor** $f(x, y)$.
2. Spočteme parciální **derivace mechanicky** tam, kde to jde.
3. Identifikujeme **problematické body** - funkce je tam definovaná, ale mechanické derivování nefunguje. Dáváme pozor na
   (a) kraje definičního oboru původní funkce;
   (b) body, kde je funkce definovaná, ale mechanické derivování ne (např. funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$);
   (c) místa, kde je funkce definovaná po částech;
   (d) funkce: absolutní hodnota, sgn, odmocniny, arcsin a arccos ...
4. Zafixujeme jeden konkrétní problematický bod $[x_0, y_0]$ a **z definice** spočítáme parciální derivaci. (Jde o limitu s 1 proměnnou, vše krom t je vlastně parametr.)
5. Typicky vyjde limita závislá na parametru - diskutujeme výsledek vzhledem k tomu parametru (podezřelému bodu $[x_0, y_0]$).
6. Uděláme **závěr**, kde všude derivace existují a kolik vyjdou.
7. Poznámky:
   (a) Parciální derivace lze počítat pouze tam, kde je definovaná původní funkce.
   (b) Parciální derivace je limita (na řezu) - lze ji počítat pouze tam, kde existuje správné okolí bodu. (Např. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ je definovaná na kruhu. Parciální derivace v krajních bodech (na kružnici) spočítat nelze, protože se tam není jak „přiblížit“.)

Příklady - zkouškové

1. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$, napište rovnici tečny v bodě a

   (a) $f(x,y) = |x^2 - y^2|$, $a = [1,2]$

   (b) $f(x,y) = e^{x^2-y} + 7y + |xy|$, $a = [1,2]$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{y + \sin x}$, $a = [0,1]$

   (d) $f(x,y) = \min\{x^2 + y^2; 2 - x^2 - y^2\}$, $a = [1,2]$

   (e) $f(x,y) = \sqrt[3]{\ln \frac{x}{y}}$, $a = [1,2]$

   (f) $f(x,y) = x^{(y^x)}$, $a = [1,2]$

   (g) $f(x,y) = (\arctan \sqrt{x^2 + y^2})^4$, $a = [1,2]$

   (h) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(x \cos y),\ x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2,\ x < 0 \end{cases}$, $a = [1,2]$

   (i) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y - 1}$, $a = [1,2]$

Bonusové příklady

2. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

3. Nechť T je tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$, která je kolmá k přímce $\{(t,t,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T osu z (přímku $\{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$)?

   Pozn.: Normála ke grafu funkce je určena rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)t \\ y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - t \end{aligned}$$