5. cvičení - Funkce více proměnných - limity + derivace

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

(a) $\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}$

Řešení: Funkce je spojitá, po dosazení

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

(b) $\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{x(y+2)+(y+2)}{y^2(x+1)+(x+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(x+1)(y+2)}{(y^2+1)(x+1)}$$
$$= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(y+2)}{(y^2+1)} = 2$$

(c) $\lim_{[x,y]\to[1,2]} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$

Řešení: Spočteme dvojnásobné limity

$$\lim_{x\to1}\left(\lim_{y\to2} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{x\to1} \frac{4x^2-4}{x^4-1} = \lim_{x\to1} \frac{4(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = 2$$
$$\lim_{y\to2}\left(\lim_{x\to1} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{y\to2} \frac{y^2-4}{y^4-16} = \lim_{y\to2} \frac{y^2-4}{(y^2-4)(y^2+4)} = \frac{1}{8}$$

Jelikož obě dvojnásobné limity existují, ale nerovnají se, tak původní limita neexistuje.

(d) $\lim_{[x,y]\to[2,0]} \frac{\tan xy}{y}$

Řešení: Myšlenka: Rozšíříme a pak aplikujeme VOLSF a známou limitu:

$$\lim_{[x,y]\to[2,0]} \frac{\tan xy}{y} = \lim_{[x,y]\to[2,0]} x\frac{\tan xy}{xy} = 2\cdot 1 = 2.$$

Technické provedení:
Funkce $f(x,y) = \frac{\tan xy}{y}$ je definovaná na množině $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,0], x \in \mathbb{R}\}$. Počítáme tedy limitu vzhledem k M.
VOLSF aplikujeme na funkci: $g(x,y) = \frac{\tan xy}{xy}$, kterou lze rozložit na funkce $g_1(t) = \frac{\tan t}{t}$ a $g_2(x,y) = xy$.
Pak máme $\lim_{t\to0} g_1(t) = 1$ a $\lim_{[x,y]\to[2,0]} xy = 0$.
Podmínka (P): funkce $xy \neq 0$ na okolí $M \cap B([2,0],1) \setminus \{[2,0]\}$.

(e) $\lim\limits_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x \sin \frac{1}{x-y+z}$

Řešení: Použijeme větu o součinu omezené a mizející funkce. Máme

$$\left|\sin \frac{1}{x-y+z}\right| \leq 1$$

a ze spojitosti

$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x = 0.$$

Dohromady

$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x \sin \frac{1}{x-y+z} = 0$$

(f) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

Řešení: Užijeme odhady

$$0 \leq \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2$$

Ze dvou policajtů máme

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

(g) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

Řešení: Rozšíříme dle vzorce, čímž dostaneme spojitou funkci:

$$\begin{aligned}\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} &= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2+1-1}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \\ &= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(h) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2}$

Řešení: Funkce vypadá, že je neomezená. Ukážeme z definice. Zvolme $K > 0$. K němu najdeme $\delta = 1/K$. Pak pro (x,y): $x^2+y^2 < \delta$ máme

$$\frac{1}{x^2+y^2} > \frac{1}{\delta} = K,$$

tedy

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$$

(i) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2}{x+y}$

Řešení: Spočteme limitu po přímce $y = x$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^2}{x + x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x} = 0.$$

Ale pro křivku $y = -x + x^2$ máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + (-x + x^2)^2}{x + (-x + x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^2 - 2x^3 + x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2 - 2x + x^2 = 2.$$

Protože limita vyšla různě po různých křivkách, tak neexistuje.

(j) $\lim\limits_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \left(1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}$

Řešení:

Použijeme VOLSF.

Vnitřní funkce $|x| + |y| + |z|$, vnější $\left(1 + \frac{2}{t}\right)^t$.

$$\lim_{t\to 0} \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t = \lim_{t\to 0} e^{t\ln(1+\frac{2}{t})} = e^0 = 1.$$

Podmínka (P): $|x| + |y| + |z| \neq 0$ na $B([0,0,0],1) \setminus \{[0,0,0]\}$.

Dohromady

$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \left(1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|}\right)^{|x|+|y|+|z|} = 1$$

(k) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{x^2 + y^6}$

Řešení: Spočteme limitu po přímce $y = x$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x^2}{x^2 + x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + x^4} = 0.$$

Ale pro křivku $y = \sqrt[3]{x}$ máme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x \cdot x^{2/3}}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{5/3}}{2x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x^{1/3}} = \infty$$

Protože limita vyšla různě po různých křivkách, tak neexistuje.

(l) $\lim\limits_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

Řešení:

Otestujeme křivku $y = z = x$, máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \frac{1}{3}.$$

Pro křivku $y = z = 0$, máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$$

Tedy limita neexistuje.

(m) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Použijeme odhad $|\sin t| \leq |t|$ a $2|xy| \leq x^2+y^2$. Pak máme

$$\left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

A protože ze spojitosti

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0,$$

máme ze dvou policajtů i

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

(n) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$

Řešení:

Otestujme přímky $y=0$ a $y=x$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\cdot 0)}{x^2+0^2} = 0$$

a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.

(o) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

Řešení: Použijeme odhady

$$\frac{|x^3y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

Dostáváme

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

(p) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{y^4-xy^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

Řešení: Otestujeme křivky $y=0$ a $y=x$. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{0^4 - x\cdot 0^2}{(x^4+0^2)\sqrt{x^2+0^2}} = 0$$

a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^4 - x\cdot x^2}{(x^4+x^2)\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^4-x^3}{(x^4+x^2)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-1}{(x^2+1)\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Tedy limita neexistuje.

(q) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y(|x|+|y|)}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

Řešení:

Otestujeme křivky $y = 0$ a $y = x^2$. Máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 0(|x|+|0|)}{(x^4+0^2)\sqrt{x^2+0^2}} = 0$$

a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2x^2(|x|+|x^2|)}{(x^4+x^4)\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x+x^2}{2\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.

2. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$.

(a) $f(x,y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 35 + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 8y$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \mathbb{R}^2$$

(b) $f(x,y) = \dfrac{\sin y^2}{x}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\sin y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y\cos y^2}{x}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

(c) $f(x,y) = xy\tan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\tan\frac{x}{y} + \frac{x}{\cos^2\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\tan\frac{x}{y} + \frac{-x^2}{y\cos^2\frac{x}{y}}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

(d) $f(x,y) = x^y$

Řešení:

$$x^y = e^{y\ln x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

(e) $f(x,y) = xe^{xy}$
Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{xy}$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \mathbb{R}^2$$

(f) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$
Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{-y}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x}$$
$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1\right\}$$
$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \left|\frac{y}{x}\right| < 1\right\}$$

(g) $f(x,y) = (x+y)^x$
Řešení:

$$(x+y)^x = e^{x\ln(x+y)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+y)^x \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(x+y)^{x-1}$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$$

(h) $f(x,y) = 3\sqrt[5]{xy^2}$
Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3y^2}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6xy}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}}$$
$$D_f = \mathbb{R}^2$$
$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 \neq 0\}$$

(i) $f(x,y) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+y}{x-y}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 - y^2}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x+y}{x-y} > 0, x \neq y\right\}$$

(j) $f(x,y) = \operatorname{arcctg} \frac{x+y}{x-y}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$