# 5. cvičení - Funkce více proměnných - limity + derivace

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

**Co máme k dispozici:**

1. Je funkce v daném bodě spojitá? $\to$ Lze **dosadit**.
2. Jde o polynom 0/0? $\to$ Možná půjde něco **vytknout** a pokrátit.
3. Jsou tam odmocniny? $\to$ Zkusme použít **vzorce**, např. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
4. Vypadá to na známou limitu? $\to$ **VOLSF**.
5. Je tam omezená (sin, cos,...) krát nulová? $\to$ **Věta** o omezené a mizející.
6. Dvojnásobné limity existují, ale jsou různé? $\to$ Limita **neexistuje**.
7. Limity po přímkách $y = kx$ vyjdou různé? $\to$ Limita **neexistuje**.
8. Limity po dalších křivkách ($y = kx^2$, $y = kx^3$, ...) vyjdou různé? $\to$ Limita **neexistuje**.
9. Vyskytuje se tam hodně $x^2 + y^2$? $\to$ Možná to půjde z **definice**. Jestliže $x^2 + y^2 < \delta$, jak vypadá $f(x, y)$?
10. Nelze použít nějaký odhad? $\to$ **Dva policajti**.

**Algoritmus:**

1. První pohled na funkci:
   (a) Je spojitá?
   (b) Vypadá to na známou limitu?
   (c) Nemá různé dvojnásobné limity?
   (d) Jak to dopadne na přímkách $y = kx$?
   (e) Je tam omezená funkce?
   (f) Jsou tam odmocniny?
2. (a) Nemáme nějaký odhad?
   (b) Jak to dopadne na dalších křivkách?
   (c) Co definice?

## Hinty

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$
$$\pm xy \leq x^2 + y^2$$

$$|\sin t| \leq 1$$
$$|\sin t| \leq |t|$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

## Příklady

1. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

   (a) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}$

   (b) ♡ $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}$

   (c) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,2]} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$

   (d) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[2,0]} \frac{\tan xy}{y}$

   (e) $\displaystyle\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x\sin\frac{1}{x-y+z}$

   (f) ♡ $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

   (h) ♡ $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2}$

   (i) ♡ $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2}{x+y}$

   (j) $\displaystyle\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}$

   (k) ♡ $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{x^2+y^6}$

   (l) $\displaystyle\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$

   (m) ♡ $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (n) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

   (o) ♡ $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

   (p) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y^4-xy^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

   (q) ♡ $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y(|x|+|y|)}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete $D_f$ a $D_{f'}$.

   (a) $f(x,y) = 35x-4y^2+3x2y$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{\sin y^2}{x}$

   (c) $f(x,y) = xy\tan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

   (d) $f(x,y) = x^y$

   (e) $f(x,y) = xe^{xy}$

   (f) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{y}{x}$

   (g) $f(x,y) = (x+y)^x$

   (h) $f(x,y) = 3\sqrt[5]{xy^2}$

   (i) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+y}{x-y}$

   (j) $f(x,y) = \operatorname{arcctg}\dfrac{x+y}{x-y}$

(1b) vytkněte $x+1$
(1f) $\leq x^2+y^2$
(1h) z definice
(1i) $y=-x+x^2$
(1k) $y=\sqrt[3]{x}$
(1m) $|\sin t|\leq|t|$, $2|xy|\leq x^2+y^2$
(1o) $2|xy|\leq x^2+y^2$, $x^2\leq x^2+y^2$
(1q) $y=x^2$