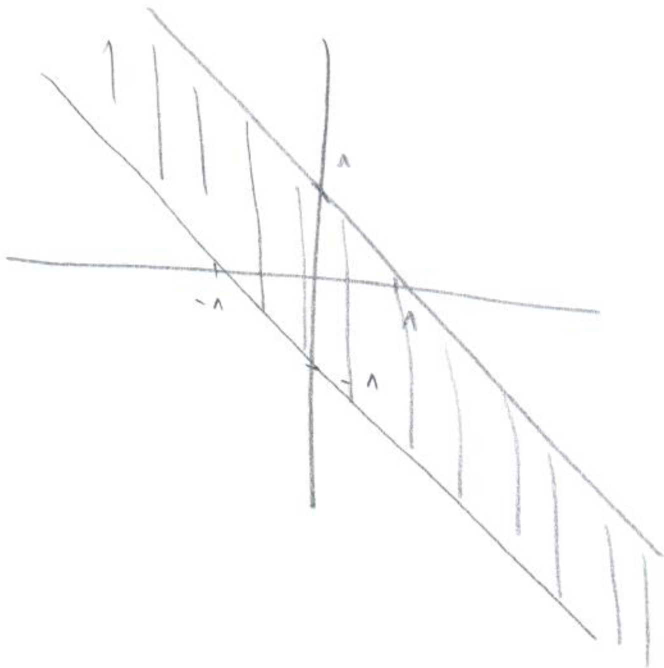
$$f(x,y) = \arcsin(x+y) + \arctan(x+y) + xy$$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq x+y \leq 1$$

$$y \leq 1-x$$

$$-1-x \leq y$$



$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{|x|-|y|}\right)$$

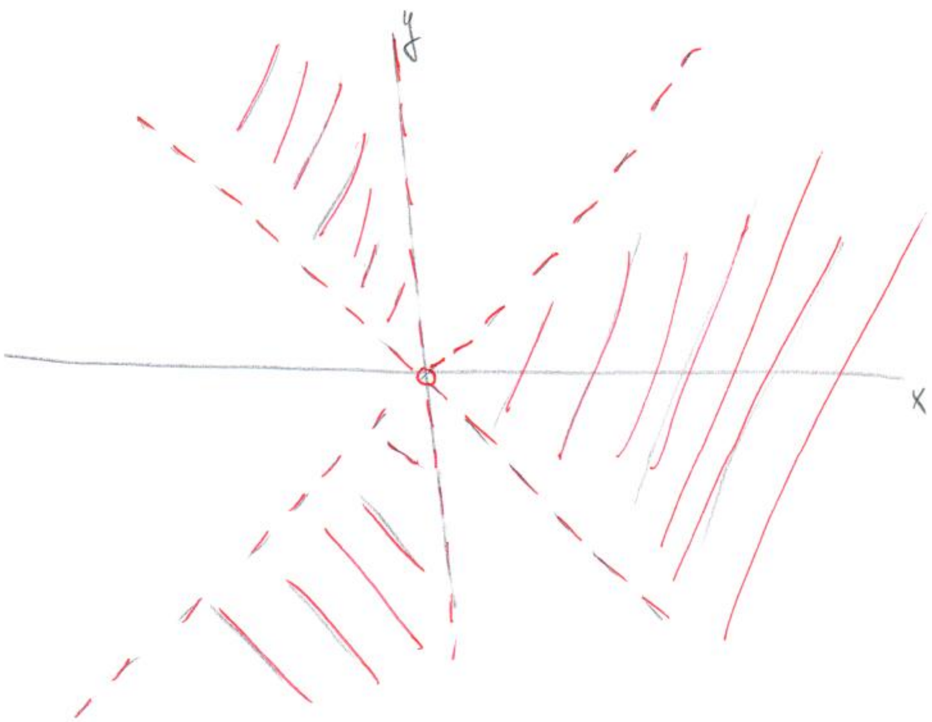
- $|x|-|y| \neq 0$ $\qquad x \neq 0$

  $|x| \neq |y|$

- $$\frac{x}{|x|-|y|} > 0$$

$x > 0$ & $|x|-|y| > 0$ $\qquad x < 0$ $\quad |x|-|y| < 0$

$|x| > |y|$ $\qquad |x| < |y|$



$f(x,y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

$y(x - y^2 + 2y) \geq 0$

- $y = 0 \quad x \in \mathbb{R}$

- $x = y^2 - 2y$

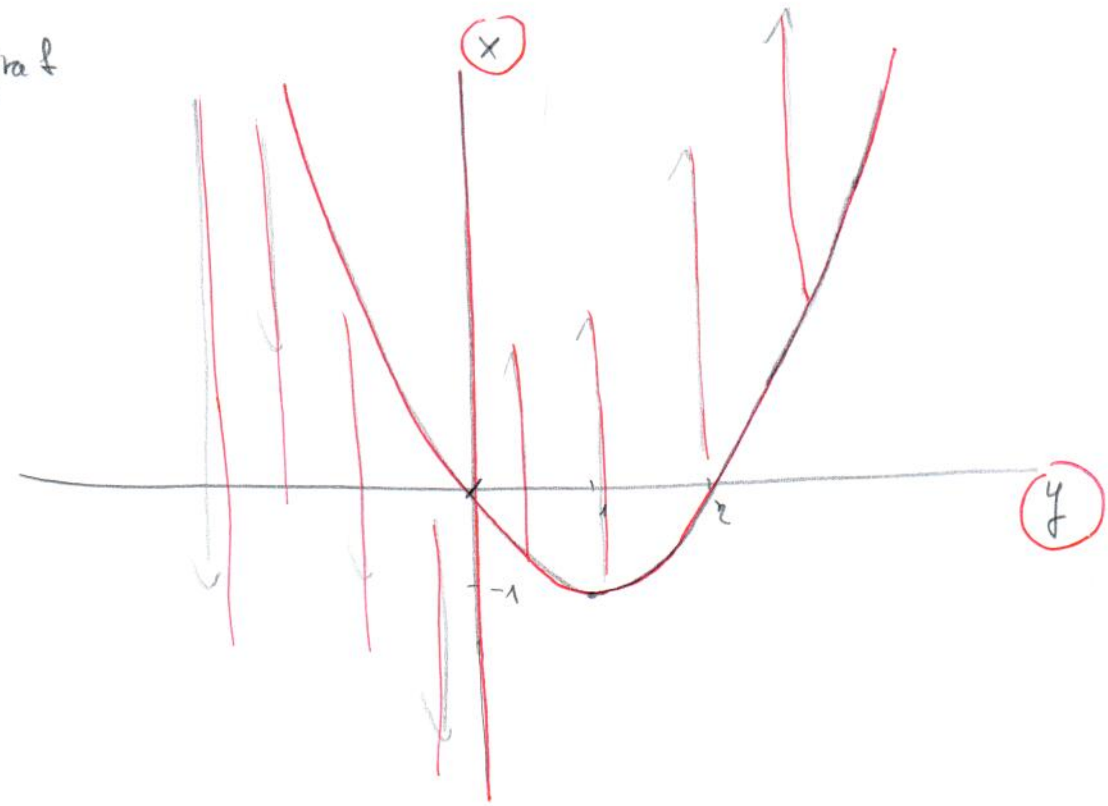
- $x \geq y^2 - 2y \quad \& \quad y \geq 0$

$x \geq (y-1)^2 - 1$

$x \leq y^2 - 2y \quad \& \quad y \leq 0$

$x \leq (y-1)^2 - 1$

graf



$f(x,y) = \arcsin \sqrt{x(x+y)}$

- $x(x+y) \geq 0$

(a) $x \geq 0 \quad (x+y) \geq 0$

$y \geq -x$

nebo

(b) $x \leq 0 \quad x+y \leq 0$

$y \leq -x$

(c) $x = 0 \quad y \in \mathbb{R}$

- $-1 \leq \sqrt{x(x+y)} \leq 1$

$x(x+y) \leq 1$

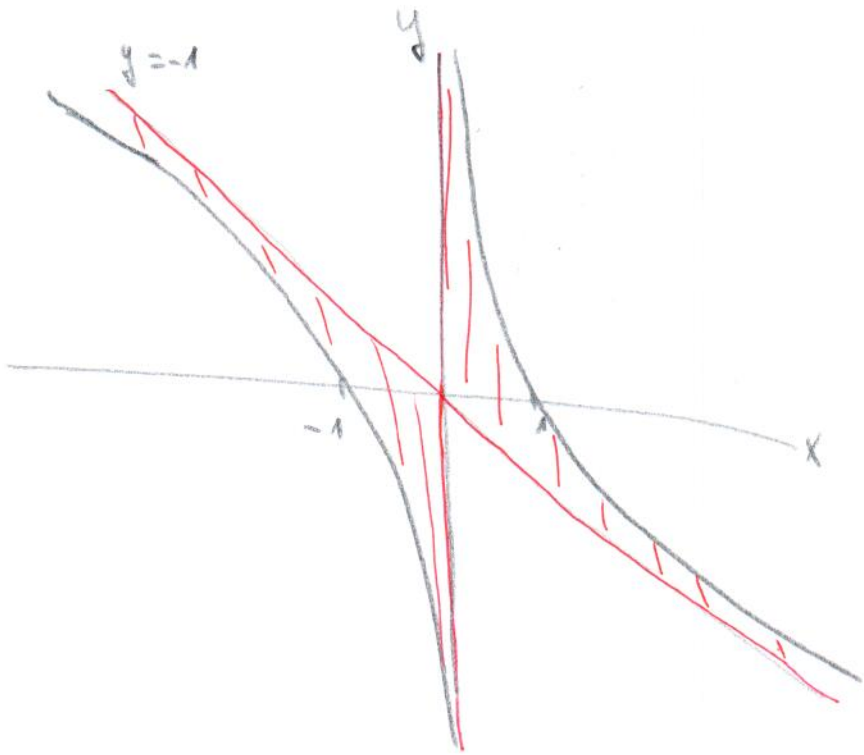
$x^2 + xy \leq 1$

$xy \leq 1 - x^2$

- $x = 0 \rightarrow y \in \mathbb{R}$

- $x > 0 \quad y \leq \frac{1}{x} - x$

- $x < 0 \quad y \geq \frac{1}{x} - x$



4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

2. Vypočtěte

   (a) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1$$

   a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

Řešení:

Nejprve vypočteme obě dvojnásobné limity. Uvědomme si, že vnitřní limitu přes y (resp. x) nám stačí počítat pro hodnoty parametru x (resp. y) různé od limitního bodu, tj. v našem konkrétním případě pro $x \neq 0$ (resp. $y \neq 0$). Platí, že

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) =$$

pro libovolnou hodnotu „parametru“x různou od nuly je funkce (proměnné y) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $y = 0$ máme

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-0}{x+0}\right) = 1.$$

Obdobně vypočteme

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) =$$

pro libovolnou hodnotu „parametru“y různou od nuly je funkce (proměnné x) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $x = 0$ máme

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0-y}{0+y}\right) = -1.$$

Protože dvojnásobné limity existují a nerovnají se, nemůže dvojná limita existovat (ani vzhledem k definičnímu oboru).

   (b) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

ale
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

Řešení:
Vypočtěme nejprve dvojnásobné limity. Uvědomme si, že funkce $f(x,y)$ je jako funkce proměnné y pro pevnou hodnotu $x \neq 0$ spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$, speciálně v bodě nula. Máme tedy, že pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = 0.$$

Proto

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0.$$

Obdobně dostaneme, že

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{0+(0-y)^2}\right) = 0.$$

Určeme nyní limitu po přímce $y = x$ pro $x \to 0$ (potom samozřejmě také $y \to 0$). Máme, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2 \cdot x^2 + (x-x)^2} = 1,$$

a protože limita po přímce $y = x$ a dvojnásobné limity (tj. limity po svislé a vodorovné ose) existují a nejsou shodné, dvojná limita nemůže existovat (ani vzhledem k definičnímu oboru).

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$

Řešení:
Vypočtěme nejprve dvojnásobné limity. Pro $x \neq 0$ máme

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^3y}{x^6+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Pro $y \neq 0$ analogicky

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^3y}{x^6+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Nyní limita po přímce $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3kx}{x^6+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2}\frac{kx^2}{x^4+k^2} = 0.$$

Zkusme křivku $y = x^3$. Pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 x^3}{x^6 + (x^3)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.

(d) $\lim_{(x,y)\to[0,0]} x\frac{xy}{x^2+y^2}$

Řešení: Použijeme nápovědu $\pm 2xy \leq x^2 + y^2$. Pak máme

$$x\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{x}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{x}{2}$$

$$x\frac{xy}{x^2+y^2} \geq -\frac{x}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = -\frac{x}{2}$$

Ale

$$\lim_{(x,y)\to[0,0]} \pm\frac{x}{2} = 0,$$

tedy ze dvou policajtů máme i

$$\lim_{(x,y)\to[0,0]} x\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

(e) $\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}$

Řešení:

Zkusíme aplikovat známé limity a aritmetiku limit, tedy:

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}} \overset{VOAL}{=} \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{\sqrt{(x-4)^2-y^2}} \cdot \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{1}{x^2}$$

Ze spojitosti máme

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}.$$

Zbývá první limita. Pro funkce jedné proměnné platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1.$$

Navíc (ze spojitosti)

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \sqrt{(x-4)^2-y^2} = 0$$

Pokud ověříme podmínky, tak z věty o limitě složené funkce budeme mít

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{\sqrt{(x-4)^2-y^2}} = 1$$

a dohromady

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}} = \frac{1}{16}.$$

Podmínky, konkrétně podmínka (P) (vnitřní funkce se vyhýbá své limitě): hledáme okolí bodu $(4,0)$ takové, aby

$$\sqrt{(x-4)^2-y^2} \neq 0.$$

Navíc se pohybujeme pouze na množině $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : (x-4)^2 - y^2 \neq 0\}$ - to je kvůli definičnímu oboru funkce v limitě.
Požadavek $\sqrt{(x-4)^2-y^2} \neq 0$ je ale spolněn např. na $B((4,0),1) \cap A$, tedy jsme ověřili podmínku (P) a jsme hotovi.

(f) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ limity

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{neexistují,}$$

ale

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ vzhledem k definičnímu oboru funkce f existuje a je rovna nule.

Řešení:
Uvědomme si, že pro žádné $x \neq \frac{1}{\pi k}$ pro $k \in \mathbb{Z}$ neexistuje limita

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Formálně to lze nahlédnout pomocí Heineho věty. Volme-li $y_n = 1/2\pi n$, potom

$$\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{2\pi n})\sin\frac{1}{x}\sin(2\pi n) = 0,$$

zatímco pro volbu $y_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ je

$$\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n})\sin\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = (x+0)\sin\frac{1}{x} \neq 0.$$

Tudíž nemůže existovat ani dvojnásobná limita

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),$$

protože vnitřní limita není definována na žádném intervalu hodnot $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Ze zcela stejného důvodu neexistuje ani druhá z dvojnásobných limit.

Naopak dvojná limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

sice neexistuje vzhledem k $\mathbb{R}^2$ (protože funkce f není definována ani na jedné ze souřadných os, a proto není definována na žádném prstencovém okolí počátku), ale vzhledem k definičnímu oboru funkce f je nulová. To proto, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0+0 = 0,$$

neboť polynom $(x+y)$ je spojitá funkce, a dále protože, že funkce $\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ je omezená. Tudíž podle lemmatu o součinu funkce s nulovou limitou a funkce omezené je výsledná limita opravdu nulová.