4. vzor limit

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

Příklady

1. Určete obě dvojnásobné limity pro funkci $f(x,y) = \frac{x-y^2}{x+y}$ v bodě $(0,0)$. Existuje limita funkce f v bodě $(0,0)$?

   Řešení:

   Při výpočtu jedné dvojnásobné limity nejprve limitíme přes $x \to 0$ a y považujeme za parametr. Dostáváme

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x-y^2}{x+y} = \frac{0-y^2}{0+y} = -y.$$

   Nyní výsledný výraz limitíme pro $y \to 0$. Dostáváme

   $$\lim_{y\to 0} -y = 0.$$

   Výpočet můžeme také zapsat do jednoho řádku:

   $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y^2}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0-y^2}{0+y}\right) = \lim_{y\to 0}(-y) = 0.$$

   Jedna z dvojnásobných limit je tedy rovna nule. Naopak druhá dvojnásobná limita vychází

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y^2}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-0}{x+0}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

   Obě dvojnásobné limity tedy existují, ale nejsou si rovny. Tudíž limita

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y^2}{x+y} \text{ neexistuje.}$$

2. Nechť je dána funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Ukažte, že limita funkce f v bodě $(0,0)$ neexistuje, přestože obě dvojnásobné limity jsou nulové.

   Řešení: Výpočet dvojnásobných limit je jednoduchý.

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0,$$

   $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{0+x^2} = 0.$$

   To mimochodem znamená, že pokud počítáme limitu po přímce $x = 0$ nebo $y = 0$, tak limity po obou těchto přímkách jsou nulové. Existenci limity tak lze vyvrátit, pokud vezmeme jinou přímku procházející bodem $(0,0)$ a limita počítaná po této přímce nebude nulová. Například lze volit přímku $y = x$. Je evidentní, že pokud $x \to 0$, pak $y \to 0$. Přitom

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Limita funkce f v bodě $(0, 0)$ tedy neexistuje.

3. Nechť je dána funkce $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$. Ukažte, že limita funkce f v bodě $(0, 0)$ neexistuje, přestože obě dvojnásobné limity jsou nulové a též limita počítaná po libovolné přímce je nulová.

   Řešení: Výpočet dvojnásobných limit je jednoduchý.

   $$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0,$$

   $$\lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4 + 0} = 0.$$

   Pokud vezmeme jinou přímku procházející bodem $(0, 0)$, tj. přímku danou rovnicí $y = ax$ pro $a \neq 0$, je příslušná limita počítaná podél této přímky

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot ax}{x^4 + (ax)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x^2 + a^2} = \frac{0}{0 + a^2} = 0.$$

   Zkusme tedy jinou křivku procházející bodem $(0, 0)$, například parabolu $y = x^2$. Potom

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

   Limita funkce f v bodě $(0, 0)$ tedy neexistuje, protože jsme našli dvě křivky (parabolu a libovolnou přímku procházející počátkem), pro které limita v bodě $(0, 0)$ počítaná podél nich není stejná.

4. Nechť je dána funkce $f(x, y) = \frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Ukažte, že limita funkce f v bodě $(0, 0)$ existuje.

   Řešení: Platí odhad

   $$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq x^2 + y^2$$

   Jelikož

   $$\lim_{[x,y]\to[0,0]} x^2 + y^2 = 0,$$

   ze dvou policajtů máme

   $$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

5. Určete limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sin(x^2+y^2)$.

Řešení:

Protože sinus v blízkosti nuly lze obvykle nahradit jeho argumentem, limitu rozšíříme výrazem (x^2+y^2). Dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Nyní dokážeme, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$$

K tomu použijeme větu o limitě složené funkce. Pro vnitřní funkci $t = x^2+y^2$ a vnější $\frac{\sin t}{t}$ platí:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0+0 = 0$, neboť polynom je spojitá funkce, lze počítat dosazením.

2. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. To je známá „tabulková“limita.

3. Pro libovolné prstencové okolí nuly, například otevřený jednotkový kruh bez bodu $(0,0)$, platí, že vnitřní funkce $x^2+y^2 \neq 0$.

Tím jsou splněny předpoklady o limitě složené funkce, která potom opravdu tvrdí, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$$

Ukážeme, že limita druhého činitele je samozřejmě nulová, neboť

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0+0} = 0,$$

neboť odmocnina je funkce spojitá v nule zprava a polynom x^2+y^2 nabývá pouze nezáporných hodnot. Máme tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

6. Ukažte, že limita funkce $f(x,y) = (x+y)\cdot \sin\frac{1}{xy}$ v bodě $(0,0)$ vzhledem k jejímu definičnímu oboru je rovna nule. Ukažte také, že dvojnásobné limity

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

neexistují.

Řešení:

Protože $(x+y)$ je polynom, tedy spojitá funkce, je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0+0 = 0.$$

A protože sinus je omezenou funkcí, je podle věty o limitě součinu omezené funkce a funkce s nulovou limitou také

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{xy} = 0.$$

Ukažme nyní, že ani jedna z dvojnásobných limit neexistuje. Pro žádné $x \neq 0$ totiž neexistuje limita

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{xy},$$

jak za chvíli ukážeme pomocí Heineho věty. Aby ale vůbec mělo smysl počítat dvojnásobnou limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{xy}\right),$$

je zapotřebí, aby výraz uvnitř kulaté závorky měl smysl na nějakém prstencovém okolí nuly, tj. pro x z intervalu $(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$ pro vhodné δ. Což, jak tedy ukážeme, není pravda.

Vyberme tedy dvě různé posloupnosti konvergující k nule: nejprve vezměme $y_n = \frac{1}{2\pi n x}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{xy_n} = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{2\pi n x})\sin(2\pi n) = 0,$$

neboť $\sin(2\pi n) = 0$. Nyní vezměme jinou posloupnost konvergující k nule, např. $y_n = \frac{1}{x(\pi/2+2\pi n)}$. Potom

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{xy_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{1}{(\pi/2+2\pi n)x}\right)\sin(\pi/2+2\pi n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{1}{x(\pi/2+2\pi n)}\right) = x+0 = x.\end{aligned}$$

Protože obě posloupnosti y_n byly prosté s nulovou limitou, podle Heineho věty limita

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{xy}$$

nemůže existovat, kdykoliv $x \neq 0$. Neexistuje tedy ani dvojnásobná limita

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{xy}\right).$$

Neexistenci druhé dvojnásobné limity dostaneme předchozím postupem, pokud všude zaměníme x a y (výraz v limitě je symetrický).