4. cvičení - Funkce více proměnných - limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$ je zobrazení, $M \subset X$ a $a \in X$ je hromadným bodem množiny M. Řekneme, že prvek $b \in Y$ je *limitou zobrazení* f *v bodě* a *vzhledem k množině* M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in M, x \neq a : \rho(x, a) < \delta \implies \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Věta 2 (Heine)**.** Nechť (X, ρ), (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$, $M \subset X$, $a \in M'$, $b \in Y$. Pak

$$\lim_{x \to a, x \in M} f(x) = b$$

právě tehdy, když: pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset M \setminus \{a\}$ platí

$$x_n \to a \implies f(x_n) \to b.$$

Věta 3 (Aritmetika limit)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $M \subset X$, $a \in M'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nechť $\lim_{x \to a, x \in M} f(x) = \alpha$ a $\lim_{x \to a, x \in M} g(x) = \beta$. Pak

1. $\lim_{x \to a, x \in M} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$
2. $\lim_{x \to a, x \in M} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$
3. $\lim_{x \to a, x \in M} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$, pokud $\beta \neq 0$.

Věta 4 (O limitě složeného zobrazení)**.** Nechť (X, ρ), (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a nechť platí:

1. $\exists \delta > 0$: $g((P(a, \delta) \cap A) \subset B$
2. $\lim_{x \to a, x \in A} g(x) = b$
3. $\lim_{y \to b, y \in B} f(y) = c$

Nechť platí jedna z podmínek

(P) $\exists \eta > 0$: $b \notin g((P(a, \eta) \cap A)$

(S) zobrazení f je spojité v bodě b vzhledem k B.

Pak

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(g(x)) = c.$$

Věta 5 (2 policajti)**.** Nechť existuje prstencové okolí $P(x_0, y_0)$ takové, že na $P(x_0, y_0)$ platí

$$h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y).$$

Nechť dále

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} h(x,y) = L = \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y),$$

$L \in \mathbb{R}$. Pak také existuje

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Věta 6 (Omezená krát nulová)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a a buď hromadným bodem množiny M. Nechť f je omezená funkce na průniku nějakého prstencového okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a množiny M a nechť

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} g(x) = 0.$$

Potom

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x)g(x) = 0.$$

Poznámka 7 (O dvojnásobné limitě)**.** Pokud existují limity $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y) = L_1$ a $\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y) = L_2$ a $L_1 \neq L_2$, tak limita $\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ neexistuje. Opačné tvrzení neplatí.

Věta 8. 1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny M. Jestliže

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = L, \qquad \text{potom} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} |f(x)| = |L|.$$

2. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny M. Potom

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = 0, \qquad \text{právě když} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} |f(x)| = 0.$$

Hinty

$2|xy| \leq x^2 + y^2$

Příklady

1. Určete definiční obor a načrtněte (příklady ze zkoušek)

    (a) $f(x, y) = \arcsin\,(x + y) + \operatorname{arctan}(x + y) + xy$

    (b) $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x}{|x| - |y|}\right)$

    (c) $f(x, y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

    (d) $f(x, y) = \arcsin\,\sqrt{x(x + y)}$

2. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

    (a) Ukažte, že pro funkci $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ platí

    $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right) = -1$$

    ale

    $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ neexistuje.

    (b) Ukažte, že pro funkci $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$ platí

    $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right) = 0,$$

    ale

    $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ neexistuje.

    (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^6 + y^2}$

    Ukažte, že limita funkce neexistuje, přestože obě dvojnásobné limity jsou nulové a též limita počítaná po libovolné přímce je nulová.

    (d) $\lim\limits_{(x,y)\to[0,0]} x\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

    (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \dfrac{\operatorname{tg}\,\sqrt{(x - 4)^2 - y^2}}{x^2\sqrt{(x - 4)^2 - y^2}}$

    (f) Ukažte, že pro funkci $f(x, y) = (x + y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ limity

    $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right)$$ neexistují, ale

    $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ vzhledem k definičnímu oboru funkce f existuje a je rovna 0.