

3. cvičení

kunc6am@natur.cuni.cz

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>

1

Definice 1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (X, ρ) , kde X je množina, $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ je funkce splňující

- (1) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (2) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- (3) $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme *metrika na X* .

Úloha 2. Určete, zda jsou následující objekty metrickým prostorem:

1. Na prostoru $\mathbb{C}([0, 2])$ spojitých funkcí na $[0, 2]$ uvažujeme

$$\rho(f, g) = |f(1) - g(1)|.$$

Řešení: Nesplňuje 1. podmínku, funkce $f = x$ a $g = x^2$ mají nulovou vzdálenost, ale nejsou totožné. Tzv. pseudometrika.

2. Na $\mathbb{R}$ uvažujeme

$$\rho(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 1, & x < y. \end{cases}$$

Řešení: Nesplňují symetrii. Tzv. kvazimetrika.

3. Prostor $\mathbb{R}^2$ s funkcí $\rho(x, y) = \rho_2(x, x_0) + \rho_2(x_0, y)$, kde x_0 značí počátek $(0, 0)$. Jedná se tedy o strukturu, kde při měření vzdálenosti dvou bodů musíme vždy projít počátkem.

Řešení: Ano, jedná se o metriku.

4. Taxi: Vzdálenost dvou míst v Praze měříme jako nejkratší možnou dráhu ujetou autem.

Řešení: Není symetrická - kvůli jednosměrkám.

Definice 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, a $x \in X$. *Vzdáleností bodu x od množiny A* rozumíme číslo

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y); y \in A\}.$$

Poznámka 4. Množinu $\mathbb{R}^n$ uvažujeme s metrikami

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

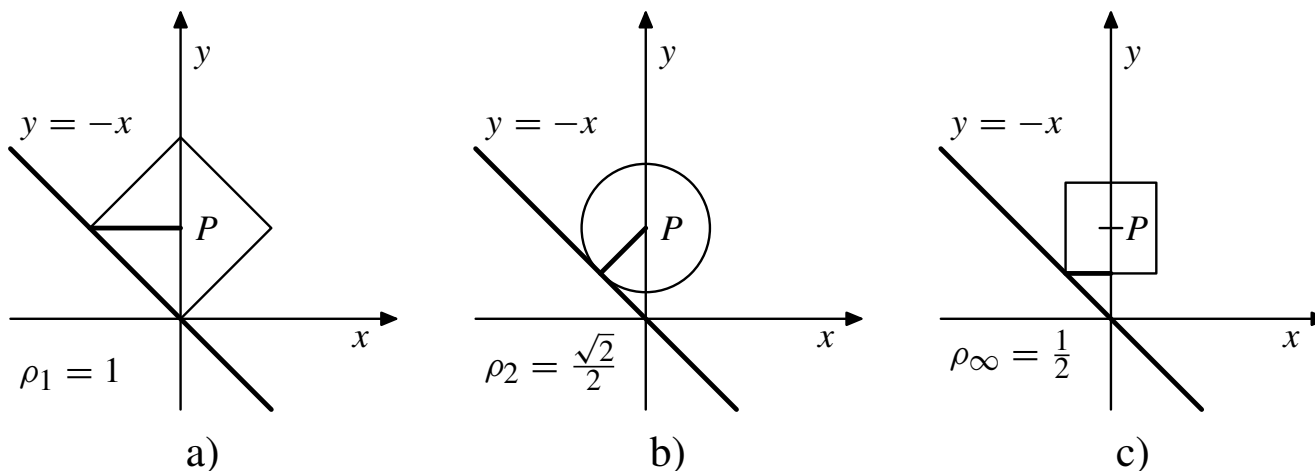
Úloha 5. Na $\mathbb{R}^2$ najděte vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v metrice

1. ρ_1

2. ρ_2

3. ρ_∞

⑤ 7



Obrázek 4: Vzdálenost bodu od přímky v metrikách ρ_1 , ρ_2 , ρ_∞

Příklady 1.9.

- i) Určete vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v součtové, euklidovské a maximální metrice.

Řešení. Uvědomíme-li si, jak vypadají množiny bodů mající od bodu P stejnou vzdálenost, můžeme úlohu řešit v grafickém znázornění. ▲

- ii) Určete vzdálenost přímky $y = c$, $c \leq 0$, od paraboly $y = x^2 - 2x + 1$ v metrikách ρ_1 , ρ_2 , ρ_∞ .

Řešení. Z polohy paraboly vidíme, že vzdálenost přímky $y = c$ od této paraboly je ve všech třech metrikách rovna $|c|$. (Porovnejte tento výsledek s výsledkem Cvičení 1.4 ii) a všimněte si, že každý z bodů $[x, c]$, $x \in [1+c, 1-c]$ má v metrice ρ_∞ od paraboly vzdálenost rovnu c .) ▲

Titulní strana

Obsah

Výsledky cvičení

Rejstřík

◀◀

▶▶

◀

▶

Strana 27 z 147

Zpět

Vpřed

Zavřít

Konec

Úloha 6. V prostoru $\mathbb{C}([0, 1])$ uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Najděte nejmenší vzdálenost funkce $f(t) = t$ od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi.

(ii) Prostor $H^1(a, b)$ funkcí f takových, že $f \in L^2(a, b)$ a

$$(\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2)^{1/2} < \infty$$

se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_a^b [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)]dt$ je úplný unitární prostor.

(iii) Prostor l^2 je unitární prostor se skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Tento součin

indukuje normu $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$.

Definice 1.8 Necht' $\mathbb{V}$ je unitární prostor a M je jeho podprostor. Podprostor

$$M^\perp = \{x \in \mathbb{V}, \langle x, m \rangle = 0 \text{ pro každé } m \in M\}$$

se nazývá *ortogonální doplněk podprostoru M ve $\mathbb{V}$* .

Věta 1.3 Necht' $\mathbb{V}$ je unitární prostor a M je jeho podprostor. Pak libovolné $x \in \mathbb{V}$ lze vyjádřit jako $x = y + z$, kde $y \in M$, $z \in M^\perp$ a pro vzdálenost $\varrho(x, M)$ platí:

$$\varrho(x, M) = \|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}.$$

Příklady

Příklad 1.1 V prostoru $C[0, 1]$ najděte nejmenší vzdálenost funkce

1. $x_0(t) = t$ od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi
2. $x_0(t) = t^2$ od podprostoru $L = \text{Lin}\{1, t\}$

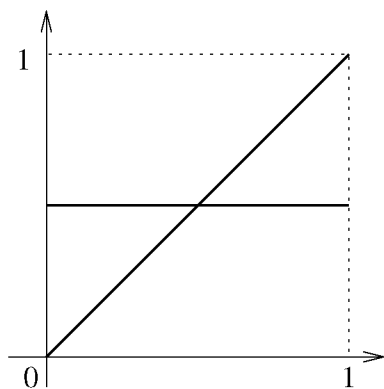
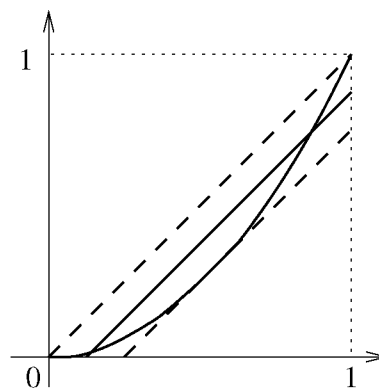
Řešení:

1. Hledáme $c \in \mathbb{R}$, aby $\max_{t \in [0, 1]} |t - c|$ bylo co nejmenší. Zřejmě je tedy $c = \frac{1}{2}$ a $\varrho(t, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ (viz graf 1.1(a)).

2. Prvky podprostoru L lze zapsat ve tvaru $\alpha + \beta t$, z grafu 1.1(b) je zřejmé, že zvolíme $\beta = 1$. Budeme tedy hledat funkci $t + \alpha$, aby $\max_{t \in [0, 1]} |t^2 - t - \alpha|$ bylo co nejmenší. Derivováním dostaneme extrém v bodě $t_0 = \frac{1}{2}$. Sestrojíme tečnu funkce x_0 v bodě t_0 : $x - \frac{1}{4} = t - \frac{1}{2}$, po úpravě $x = t - \frac{1}{4}$. Hledaná funkce bude zřejmě mezi touto tečnou a funkcí $x = t$. Tedy nejmenší vzdálenost získáme pro $\alpha = -1/8$ a

$$\varrho(t^2, t - 1/8) = |t^2 - t + 1/8|_{t=1/2} = 1/8.$$

6

(a) Graf funkce $x_0 = t$ a $x = 1/2$ (b) Grafy funkcí $x_0 = t^2$ a $x = t - 1/8$ plnou čarou, graf $x = t$ a tečny $x = t - 1/4$ čárkovaně.

Příklad 1.2 Určete vzdálenost funkce $x(t) = t^2$ od prostoru $M = \text{Lin}\{1, t\}$ v prostoru $L^2(0, 1)$ a funkci x vyjádřete ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in M$ a $z \in M^\perp$.

Řešení: K určení vzdálenosti nejdříve vyjádříme x pomocí y a z . Protože $y \in M$ platí $y = at + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Rovnici $x = y + z$ vynásobíme postupně 1 a t a získáme tak rovnice pro a a b :

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= y \cdot 1 + z \cdot 1 \Leftrightarrow \int_0^1 t^2 dt = \int_0^1 (at + b) dt \\ x \cdot t &= y \cdot t + z \cdot t \Leftrightarrow \int_0^1 t^3 dt = \int_0^1 t(at + b) dt \end{aligned}$$

Po integraci dostáváme rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + b &= \frac{1}{3} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Po konečné úpravě máme $y = t - \frac{1}{6}$ a $z = x - y = t^2 - t + \frac{1}{6}$. Podle věty 1.3 je $\varrho^2(x, M) = \|z\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt$, a tedy $\varrho(x, M) = \frac{\sqrt{5}}{30}$.

Příklad 1.3 Určete vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ od podprostoru $M = \{x = \{x_k\}_{k=1}^\infty : x_1 = x_2\}$ v prostoru

1. l^1 2. l^2 3. l^∞ .

Řešení:

1. Hledáme posloupnost $y \in M$, aby $\varrho(x, y) = \sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|$ byla co nejmenší. Zřejmě $x_j = y_j$ pro $j \geq 3$. Pak $\varrho(x, y) = |1 - y_1| + |2 - y_2|$, přičemž $y_1 = y_2$. Proto hledaná vzdálenost $\varrho_1(x, M)$ je minimem funkce $f(t) = |1 - t| + |2 - t|$ a z grafu 1.2 získáme $\varrho_1(x, M) = 1$.

Poznámka 7. Necht' $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

Poznámka 8. Uvažujme množinu všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$. Pak definujeme metriku

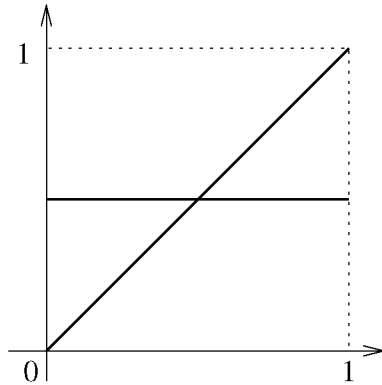
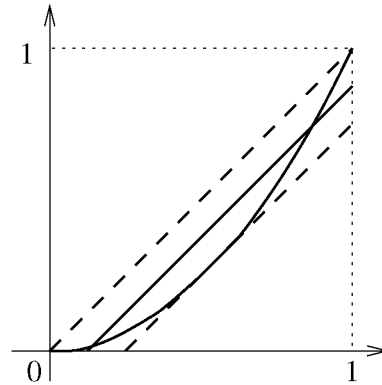
$$\rho_{\infty}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 9. Určete vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ od množiny $M = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_1 = x_2\}$ v prostorech

1. l_1

2. l_2

3. l_{∞}

(a) Graf funkce $x_0 = t$ a $x = 1/2$ (b) Grafy funkcí $x_0 = t^2$ a $x = t - 1/8$ plnou čarou, graf $x = t$ a tečny $x = t - 1/4$ čárkovaně.

Příklad 1.2 Určete vzdálenost funkce $x(t) = t^2$ od prostoru $M = \text{Lin}\{1, t\}$ v prostoru $L^2(0, 1)$ a funkci x vyjádřete ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in M$ a $z \in M^\perp$.

Řešení: K určení vzdálenosti nejdříve vyjádříme x pomocí y a z . Protože $y \in M$ platí $y = at + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Rovnici $x = y + z$ vynásobíme postupně 1 a t a získáme tak rovnice pro a a b :

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= y \cdot 1 + z \cdot 1 \Leftrightarrow \int_0^1 t^2 dt = \int_0^1 (at + b) dt \\ x \cdot t &= y \cdot t + z \cdot t \Leftrightarrow \int_0^1 t^3 dt = \int_0^1 t(at + b) dt \end{aligned}$$

Po integraci dostáváme rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + b &= \frac{1}{3} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Po konečné úpravě máme $y = t - \frac{1}{6}$ a $z = x - y = t^2 - t + \frac{1}{6}$. Podle věty 1.3 je $\varrho^2(x, M) = \|z\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt$, a tedy $\varrho(x, M) = \frac{\sqrt{5}}{30}$.

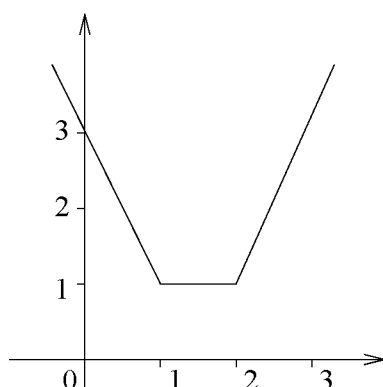
Příklad 1.3 Určete vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ od podprostoru $M = \{x = \{x_k\}_{k=1}^\infty : x_1 = x_2\}$ v prostoru

1. l^1 2. l^2 3. l^∞ .

Řešení:

1. Hledáme posloupnost $y \in M$, aby $\varrho(x, y) = \sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|$ byla co nejmenší. Zřejmě $x_j = y_j$ pro $j \geq 3$. Pak $\varrho(x, y) = |1 - y_1| + |2 - y_2|$, přičemž $y_1 = y_2$. Proto hledaná vzdálenost $\varrho_1(x, M)$ je minimem funkce $f(t) = |1 - t| + |2 - t|$ a z grafu 1.2 získáme $\varrho_1(x, M) = 1$.

9

Obrázek 1.2: Graf funkce $f(t) = |1 - t| + |2 - t|$.

2. Podobně jako v prvním případě převedeme úlohu na hledání minima funkce $f^2(t) = (t - 1)^2 + (t - 2)^2$. Derivováním dostaneme minimum $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pro $t = \frac{3}{2}$. Proto $\varrho_2(x, M) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Opět hledáme t , aby $\max\{|t - 1|, |t - 2|\}$ bylo co nejmenší. Což je totéž, jako najít nejmenší vzdálenost bodu $[1, 2]$ a přímky $y = x$ v maximální metrice na $\mathbb{R}^2$. Snadno dostaneme $\varrho([1, 2], x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pro $x = \frac{3}{2}$ a proto $\varrho_\infty(x, M) = \frac{1}{2}$.

Části 1 a 2 lze také řešit analogicky jako část 3.

Příklad 1.4 V prostoru l^2 najděte vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$ od množiny $L_n = \left\{x = \{x_k\}_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^n x_k = 0\right\}$.

Řešení: Hledáme $y \in L_n$, aby $\varrho(x, y)$ byla co nejmenší. Zřejmě bude $y_k = 0$ pro všechna $k > n$. Metodou Lagrangeových multiplikátorů najdeme minimum funkce $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ vázané podmínkou $x_1 + \dots + x_n = 0$. Lagrangeova funkce je

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \lambda(x_1 + \dots + x_n)$$

a hledáme řešení systému rovnic:

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= 0, \\ &\vdots \\ L_{x_n} &= 0, \\ x_1 + \dots + x_n &= 0. \end{aligned}$$

Pro první proměnnou platí

$$L_{x_1} = 2(x_1 - 1) - \lambda = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{2} + 1.$$

2

Definice 10. Necht $x \in X$, $r > 0$. *Otevřenou kouli* rozumíme množinu

$$B(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) < r\}$$

Uzavřenou kouli rozumíme množinu

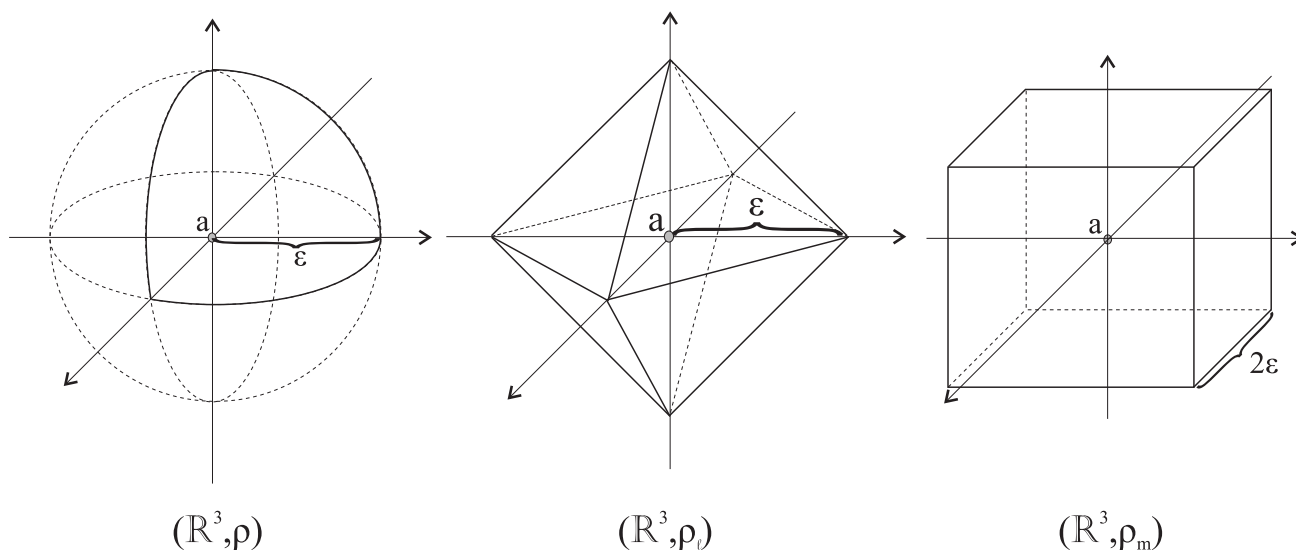
$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) \leq r\}$$

Úloha 11. Náčrtněte jednotkovou kouli v prostoru (R^3, ρ_1) , (R^3, ρ_2) , (R^3, ρ_∞) .

- množina $\overline{\Omega}(a, \varepsilon) = \{x \in (\mathcal{X}, \rho); \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$ se nazývá *uzavřená koule se středem v bodě a a poloměrem ε* ;
- množina $\mathcal{S}(a, \varepsilon) = \{x \in (\mathcal{X}, \rho); \rho(x, a) = \varepsilon\}$ se nazývá *sféra se středem v bodě a a poloměrem ε* .

Příklad:

Jak vypadá uzavřená koule $\overline{\Omega}(a, \varepsilon)$ v prostorech $(\mathbb{R}^3, \rho)$, $(\mathbb{R}^3, \rho_l)$ a $(\mathbb{R}^3, \rho_m)$?



5 Některé významné body a množiny metrického prostoru

Definice 5.1 Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor s metrikou ρ .

- Nechť $A \subset \mathcal{X}$. Bod $a \in A$ se nazývá *vnitřním bodem množiny A* , jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že $\mathcal{U}(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá *vnitřek množiny A* a značí se A° nebo $\text{int}A$.
- Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže $A = A^\circ$.
- Nechť $A \subset \mathcal{X}$. Bod $a \in \mathcal{X}$ se nazývá *hromadným bodem množiny A* , jestliže každé jeho redukované okolí obsahuje aspoň jeden bod $y \in A$ (nebo ekvivalentně, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A). Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace množiny A* a značí se A' .
- Bod $a \in A$, který není hromadným bodem množiny A se nazývá *izolovaným bodem množiny A* .

Úloha 12. Jak vypadá koule v diskretním metrickém prostoru?

Řešení: V diskretní metrice závisí koule na poloměru. Je-li $r \leq 1$, splyne koule se svým středem: $B(x, r) = \{x\}$. Pro $r > 1$ se koule bude rovnat celému prostoru: $B(x, r) = X$.

Definice 13. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků X . Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* k $y \in X$ v (X, ρ) , jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (X, ρ) . *Konvergentní posloupností* v (X, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků X , která má limitu v (X, ρ) .

Definice 14. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je *uzavřená* v X , jestliže platí: pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v M , splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaký prvek $x \in X$, pak platí: $x \in M$.

Definice 15. Nechť $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *vnitřním bodem množiny* M , jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x, r) \subset M$.

Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená* v (X, ρ) , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Poznámka 16. 1. Množina F v metrickém prostoru (X, ρ) je uzavřená právě tehdy, když $X \setminus F$ je otevřená.

2. Množina G v metrickém prostoru (X, ρ) je otevřená právě tehdy, když $X \setminus G$ je uzavřená.

Úloha 17. Určete, zda je interval $(0, 1)$ otevřená či uzavřená množin v metrickém prostoru (X, ρ) , jestliže

1. $X = (0, 1)$, $\rho = \rho_1$,

Řešení: Otevřená i uzavřená, protože celý prostor je vždy otevřený i uzavřený.

2. $X = \mathbb{R}$, $\rho = \rho_1$,

Řešení: Otevřená.

3. $X = [0, 1]$ s diskretní metrikou,

Řešení: Otevřená i uzavřená. Každá podmnožina diskretního metrického prostoru je otevřená i uzavřená.

4. $X = (0, 1) \cup (3, 4)$, $\rho = \rho_1$.

Řešení: Otevřená i uzavřená. Otevřená - každému bodu lze opsat malou kouli, která se vejde do intervalu $(0, 1)$. Uzavřená - Stačí ukázat, že $(3, 4)$ je otevřená (to se ukáže stejně). Doplněk pak musí být uzavřená.

Definice 18. Nechť $M \subset X$. Řekneme, že x je *hraničním bodem množiny* M , pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji ∂M .

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $\bar{M} = M \cup \partial M$.

Úloha 19. Určete, zda množina M je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou):

1. $M = (0, 1)$

Řešení: Otevřená. $\text{Int } M = (0, 1)$ ($\text{Int } M$ značí vnitřek/všechny vnitřní body M). $\overline{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.

2. $M = [0, 1]$

Řešení: Uzavřená. $\text{Int } M = (0, 1)$ $\overline{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.

3. $M = (0, 1]$

Řešení: Ani otevřená, ani uzavřená. $\text{Int } M = (0, 1)$ $\overline{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.

4. $M = (0, \infty)$

Řešení: Otevřená. $\text{Int } M = (0, \infty)$ $\overline{M} = [0, \infty)$. $\partial M = \{0\}$.

5. $M = [0, \infty)$

Řešení: Uzavřená. $\text{Int } M = (0, \infty)$ $\overline{M} = [0, \infty)$. $\partial M = \{0\}$.

6. $M = (-\infty, \infty)$

Řešení: Otevřená i uzavřená. $\text{Int } M = (-\infty, \infty)$ $\overline{M} = (-\infty, \infty)$. $\partial M = \emptyset$.

7. $\mathbb{N}$

Řešení: Uzavřená. $\text{Int } M = \emptyset$. $\overline{M} = \mathbb{N}$. $\partial M = \mathbb{N}$.

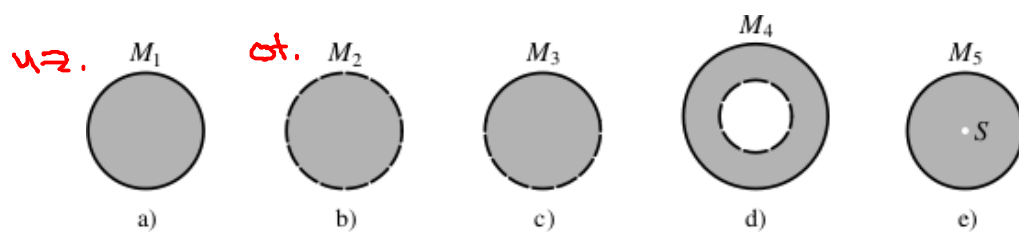
8. $\mathbb{Q}$

Řešení: Ani uzavřená, ani otevřená. $\text{Int } M = \emptyset$. $\overline{M} = \mathbb{R}$. $\partial M = \mathbb{R}$.

9. $\mathbb{R}$

Řešení: Otevřená i uzavřená. $\text{Int } M = \mathbb{R}$. $\overline{M} = \mathbb{R}$. $\partial M = \emptyset$.

Úloha 20. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v $\mathbb{R}^2$).



$\partial M =$ (okružnice)
 $\partial M =$ (2 okružnice)
 $\partial M =$ (okružnice a bod)

Úloha 21. Rozhodněte, zda platí (v obecném metrickém prostoru):

1. $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$

10.10.3. Příklad. Označme symbolem ℓ^∞ množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\ell^\infty} : \ell^\infty \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ je normovaný lineární prostor.

10.10.4. Příklad. Označme symbolem c_0 množinu všech posloupností reálných čísel s nulovou limitou. Dokažte, že $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ je normovaný lineární podprostor prostoru c , a tedy také prostoru ℓ^∞ .

10.10.5. Příklad. Necht $p \in [1, \infty)$. Označme ℓ^p množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}$ splňujících

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Definujme funkci $\|\cdot\|_{\ell^p} : \ell^p \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dokažte, že $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ je normovaný lineární prostor.

10.10.6. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor. Dokažte následující tvrzení:

- (a) pro každé $x \in P$ a pro každé $r > 0$, platí $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B(x, r)}$,
- (b) opačná inkluze obecně neplatí.

Řešení. (a) Necht $x \in P$, $r > 0$ a $y \in \partial B(x, r)$. Předpokládejme pro spor, že $\varrho(x, y) > r$. Položme $s = \varrho(x, y) - r$. Potom $s > 0$ a pro každé $z \in B(y, s)$ platí

$$\varrho(x, z) \geq \varrho(x, y) - \varrho(y, z) > \varrho(x, y) - s = r,$$

takže $z \notin B(x, r)$. To znamená, že $B(y, s) \cap B(x, r) = \emptyset$. To je ale spor s tím, že $y \in \partial B(x, r)$. Musí tedy platit $\varrho(x, y) \leq r$, a tedy $\partial B(x, r) \subset \overline{B(x, r)}$. Celkem tedy máme

$$\overline{B(x, r)} = B(x, r) \cup \partial B(x, r) \subset \overline{B(x, r)}.$$

(b) Necht P je diskretní metrický prostor obsahující alespoň dva různé body a $x \in P$. Potom

$$B(x, 1) = \overline{B(x, 1)} = \{x\},$$

ale $\overline{B(x, 1)} = P$. Protože P má alespoň dva různé body, inkluze $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B(x, r)}$ neplatí. ♣

10.10.7. Příklad. Necht (P, ϱ) je metrický prostor a $\{F_n\}$ je nerostoucí posloupnost uzavřených množin v P . Necht pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in F_n$, přičemž posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k nějakému bodu $x \in P$. Dokažte, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Řešení. Necht $k \in \mathbb{N}$ je dáno. Pak $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost bodů v F_k konvergující k x . Protože množiny F_k jsou uzavřené, platí $x \in F_k$. Tedy $x \in F_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a proto $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. ♣

2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Řešení: Nikoli. Např. $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$. Pak $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, ale $\overline{A} \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\} = \{1\}$.

Úloha 22. Najděte uzávěry grafů funkcí v $\mathbb{R}^2$

1.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Řešení: Graf samotný sjednocen s úsečkou $\{[0, y], y \in [-1, 1]\}$.

2. Dirichletova funkce

Řešení: Osa x a přímka $y = 1$.

3. Riemannova funkce

Řešení: Graf sjednocený s osou x .

3

~~**Úloha 23.** Necht' $0 < p \leq q < \infty$. Sestrojte množinu A tak, aby $\text{diam } A = q$, a $\text{diam } A^\circ = p$~~

~~**Řešení:** Např. $(0, p) \cup \{q\}$~~

Úloha 24. Najděte netriviální $A \subset \mathbb{R}$, aby splňovala následující

1. $\overline{A} = \partial A$

Řešení: $\{1\}$

2. $\text{Int } \overline{A} \supsetneq A$

Řešení: $\mathbb{Q}$

3. $\text{Int } \overline{A} \subsetneq A$

Řešení: $[0, 1)$

4. $\overline{\text{Int } A} \subsetneq A$

Řešení: $\mathbb{Q}$

5. $\overline{\text{Int } A} \supsetneq A$

Řešení: $(0, 42]$

6. $\overline{\text{Int } A} = A$

Řešení: $[-3, 5]$

6. cvičení

kunc6am@natur.cuni.cz

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>

1

Poznámka 1. Funkce $f(x, y) = x$ a $f(x, y) = y$. Spojitost funkcí je pak zachována aritmetickými operacemi (krom dělení 0) i skládáním.

Úloha 2. Pečlivě zdůvodněte, že následující funkce jsou spojité (na svém D_f):

25

1. $\sin \frac{xy}{x^2 - y^3}$

Řešení: Funkce $f(x, y) = x$ a $f(x, y) = y$ jsou spojité (vizte poznámku). Jejich součiny jsou taky spojité, tedy máme spjitost xy , x^2 a y^3 . Rozdíl a podíl spojitých funkcí (pakliže nedělíme 0) je také spojitý, máme tedy spjitost funkce $\frac{xy}{x^2 - y^3}$ na množině $[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^3$. Funkce $f(z) = \sin z$ je také spojitá a tedy složení funkcí $\sin \frac{xy}{x^2 - y^3}$ je také spojité na $[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^3$.

2. $\arctan (x^2 + y^2)$

Řešení: Podobně.

3. $\ln(e^{|x^2 - y^2|} + 1)$

Řešení: Podobně.

4. $(x + y)^{xy}$

Řešení: Přepíšeme jako $e^{xy \ln(x+y)}$. Definičním oborem pak je $[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0$. Pak už postupujeme analogicky.

26

Úloha 3. Necht' $f(x) = x^2$. Najděte vzory množin:

1. $\{4\}$

Řešení: Z grafu: $\{-2, 2\}$

2. $(0, 9)$

Řešení: $(-3, 0) \cup (0, 3)$

3. $[0, 9]$

Řešení: $(-3, 3)$

4. $[1, 9]$

Řešení: ~~$[-3, 3]$~~

$[-3, 1] \cup [1, 3]$

5. $(-2, \infty)$

Řešení: $\mathbb{R}$

6. $\{-4\}$

Řešení: $\emptyset$

27

Úloha 4. Necht' $f(x) = \sin x$. Najděte vzory množin:

1. $\{1\}$

Řešení: $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2. $(-1, 1)$

Řešení: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3. $[0, 1)$

Řešení: Let $A := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $B := \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. The resolution is $A \cup B$. *Dobrymady*

4. $(-2, -1]$

Řešení: $\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *$B := \bigcup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$*

5. $(-\infty, -3]$

Řešení: $\emptyset$

Poznámka 5. Necht' (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory a $f : X \rightarrow Y$ je spojitě zobrazení. Pak pro otevřenou množinu G v (Y, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X, ρ) a pro uzavřenou množinu F v (Y, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X, ρ) .

Úloha 6. Určete, zda jsou následující množiny otevřené nebo uzavřené a pečlivě zdůvodněte:

1. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 \leq 2\}$

Řešení: Definujme funkci $f(x, y) = x^2 - y^3$. Funkce je spojitá (násobení a rozdíl spojitých). Dále uvažujme interval $(-\infty, 2]$, který je uzavřený. Množina pak je rovna $f^{-1}((-\infty, 2])$, tedy vzoru uzavřeného intervalu při spojitěm zobrazení. Tedy je uzavřená. *uzavřená*

2. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \arctan(x^2 + y^2) > 5\}$

Řešení: $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$, interval $I = (5, \infty)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená. *uzavřená*

3. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -3 < e^{|x^2 - y^2|} < 2\}$

Řešení: $f(x, y) = e^{|x^2 - y^2|}$, interval $I = (-3, 2)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená. *uzavřená*

4. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3, x + y \leq 5\}$

Řešení: $f(x, y) = x + y$, interval $I = (-\infty, 5]$ je uzavřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je uzavřená.

Dále $g(x, y) = x$, interval $J = [0, 1]$ je uzavřená množina. Tedy $g^{-1}(J)$ je uzavřená.
 Dále $h(x, y) = y$, interval $K = [-3, 3]$ je uzavřená množina. Tedy $h^{-1}(K)$ je uzavřená.

Dohromady: průnik 3 uzavřených je uzavřená.

Úloha 7. Určete, zda jsou následující množiny omezené:

1. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3\}$

Řešení: Ano, přímo z definice se vejde do koule $B(0, \sqrt{3})$.

2. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} < 10\}$

Řešení: Ne. Uvažujme např. množinu: $y = 1$ a $x > 1$.

3. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

Řešení: Ano, neb $x^2 + y^2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 1$.

4. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) \leq 1\}$

Řešení: Ne, nerovnost je splněna pro celou rovinu.

5. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^6 + y^6 < 2\}$

Řešení: Ano, platí $|x| < 2$ a $|y| < 2$, což je čtverec, který je jistě omezená množina.

6. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{xy}{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}\}$

Řešení: Ne. Máme $2xy < x^2 + y^2$ tedy $0 < x^2 - 2xy + y^2$, což je $0 < (x - y)^2$. Tedy nerovnici splňuje celá rovina krom počátku, což není omezená množina.

2

Definice 8. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je v prostoru (X, ρ) *hustá*, jestliže $\overline{M} = X$, a *řídka*, jestliže $X \setminus \overline{M}$ je hustá.

Úloha 9. Určte, zda jsou následující množiny husté/řídke (příp. ani jedno). Určete jejich mohutnost:

1. $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ hustá spočetná
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ hustá nespočetná
3. $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$ řídka spočetná
4. $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{R}$ řídka spočetná

Úloha 10. Určte, zda jsou následující množiny husté/řídke (příp. ani jedno):