24. cvičení - Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Najděte nebo vyvraťte všechny možné implikace mezi následujícími čtveřicemi výroků. (od prof. M. Huška: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~mhusek/exercise/)

   (a) Nechť $A \subset \mathbb{R}$

   i. A je nespočetná
   ii. A je nekonečná
   iii. A je neomezená
   iv. $\mathbb{R} \setminus A$ je spočetná

   Řešení:

   i $\Rightarrow$ ii: nespočetné množiny musí být nekonečné

   ii $\not\Rightarrow$ i: protipříklad - spočetné množiny, např. $\mathbb{Q}$ nebo $\mathbb{N}$.

   i $\not\Rightarrow$ iii: protipříklad - interval $(1, 2)$

   iii $\not\Rightarrow$ i: protipříklad - spočetná mna, např. $\mathbb{N}$

   i $\not\Rightarrow$ iv: protipříklad - např. $A = (0, \infty)$, pak $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0]$

   iv $\Rightarrow$ i: protože nespočetné $\mathbb{R} = A \cup \mathbb{R} \setminus A$, tak A nebo $\mathbb{R} \setminus A$ musí být nespočetná. Kdyby byly obě spočetné, tak jejich sjednocení musí být také, což je spor.

   ii $\not\Rightarrow$ iii: protipříklad - interval $(1, 2)$

   iii $\Rightarrow$ ii: sporem - kdyby A byla konečná, tak lze vybrat její největší (a nejmenší) prvek. Pak je ale omezená, což je spor.

   ii $\not\Rightarrow$ iv: protipříklad - např. $\mathbb{Q}$

   iv $\Rightarrow$ ii: podobně jako iv $\Rightarrow$ ii. Kdyby A byla konečná, tak $\mathbb{R} = A \cup \mathbb{R} \setminus A$ by nemohla být spočetná.

   iii $\not\Rightarrow$ iv: protipříklad - např. $\mathbb{Z}$.

   iv $\Rightarrow$ iii: sporem - nechť A je omezená, tedy $A \subset (a, b)$. Pak ale $\mathbb{R} \setminus A \supset (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, tedy musí být nespočetná, což je spor.

(b) Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení

i. f je surjekce

ii. je-li X nekonečná, pak Y je nekonečná

iii. pro každé $A \subset Y$ je $A = f(f^{-1}(A))$

iv. je-li Y nekonečná, pak X je nekonečná

Řešení:

i $\not\Rightarrow$ ii: protipříklad - $X = \mathbb{N}$, $Y = \{1\}$, $f(x) = 1$.

ii $\not\Rightarrow$ i: protipříklad - $X = Y = \mathbb{R}$, $f = x^2$.

i $\Rightarrow$ iii: Zvolme $B \subset Y$ a $b \in B$. Protože f je surjekce, tak existuje $x \in X : f(x) = b$. Tedy $x \in f^{-1}(B)$. Pak ale $b = f(x) \in f(f^{-1}(B)$, tedy $B \subset f(f^{-1}(B)$.
Pro opačnou inkluzi volme $b \in f(f^{-1}(B))$. Pak existuje $x \in f^{-1}(B) : f(x) = b$. Pak ale $b \in B$ (vzor množiny B). Tedy $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Dohromady $B = f(f^{-1}(B))$.

iii $\Rightarrow$ i: Volme $A = Y$. Pak $Y = f(f^{-1}(Y) \subset f(X) \subset Y$. Odtud $f(X) = T$, tedy f je surjekce.

i $\Rightarrow$ iv: Pro spor předpokládejme, že f je surjekce, Y je nekonečná, ale X je konečná. Pak $f(X)$ je konečná množina, ale zároveň $f(X) = Y$ (surjekce), což je spor.

iv $\not\Rightarrow$ i: protipříklad - $X = \mathbb{N} = Y$, $f(x) = x + 1$.

ii $\not\Rightarrow$ iii: Nemůže platit, protože pak by platilo ii $\Rightarrow$ i.

iii $\not\Rightarrow$ ii: Nemůže platit, protože pak by platilo i $\Rightarrow$ ii.

ii $\not\Rightarrow$ iv: Uvažujme zobrazení $f : \{0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$ tvaru $f(x) = x$. Pak podmínka ii je triviálně splněna (podmínka je prázdná), ale iv neplatí.

iv $\not\Rightarrow$ ii: Nemůže platit, protože pak by platilo i $\Rightarrow$ ii.

iii $\Rightarrow$ iv: Plyne z iii $\Rightarrow$ i a i $\Rightarrow$ iv.

iv $\not\Rightarrow$ iii: Nemůže platit, protože pak by (z tranzitivity implikací) platilo iv $\Rightarrow$ i.

(c) Nechť f je reálná funkce.

i. existuje f' vlastní na $[0,1]$
ii. f je spojitá na $[0,1]$
iii. f' je omezená na $[0,1]$
iv. f' je spojitá na $[0,1]$

Řešení:

i $\Rightarrow$ ii: máme větu.

ii $\not\Rightarrow$ i: protipříklad - $|x|$

i $\not\Rightarrow$ iii: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak pro $x \neq 0$ je $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$, pro $x = 0$ je $f'(0) = 0$ (z definice). Funkce f' není omezená na okolí 0: položme $a_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} -2\sqrt{(2n+1)\pi} \cos((2n+1)\pi) = \infty.$$

Funkce f' tedy není omezená na okolí 0.

iii $\Rightarrow$ i: omezená derivace znamená, že musí být i vlastní

i $\not\Rightarrow$ iv: Stejný protipříklad jako výše. Funkce f' není spojitá v 0 z Heineho věty.

iv $\Rightarrow$ i: plyne z iv $\Rightarrow$ iii a iii $\Rightarrow$ i.

ii $\not\Rightarrow$ iii: Neplatí, protože pak by platilo i ii $\Rightarrow$ i.

iii $\Rightarrow$ ii: plyne z iii $\Rightarrow$ i a i $\Rightarrow$ ii.

ii $\not\Rightarrow$ iv: Neplatí, protože pak by platilo i ii $\Rightarrow$ i.

iv $\Rightarrow$ ii: plyne z iv $\Rightarrow$ iii a iii $\Rightarrow$ ii.

iii $\not\Rightarrow$ iv: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak pro $x \neq 0$ je $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, pro $x = 0$ je $f'(0) = 0$ (z definice). Funkce f' není spojitá v 0: položme $a_n = \frac{1}{2n\pi}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to\infty} -\cos(2\pi n) = -1.$$

Funkce f' tedy není spojitá v 0 (Heineho věta).

iv $\Rightarrow$ iii: spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu je omezená (věta)

(d) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost.

i. $\{a_n\}$ není konstantní
ii. $\{a_n\}$ má prostou podposloupnost
iii. $\{a_n\}$ má ryze monotónní podposloupnost
iv. množina hodnot $\{a_n\}$ je nekonečná

Řešení:

i $\not\Rightarrow$ ii: protipříklad - $(-1)^n$

ii $\Rightarrow$ i: jesltiže je b_n prostá podposloupnost a_n, tak musí mít alespoň dva různé prvky. Tedy je má i a_n, tedy není konstantní.

i $\not\Rightarrow$ iii: protipříklad - $(-1)^n$

iii $\Rightarrow$ i: ryze monotónní podposloupnost je zároveň prostá

i $\not\Rightarrow$ iv: protipříklad - $(-1)^n$

iv $\Rightarrow$ i: Kdyby a_n byla konstantní, tak množina hodnot by byla jediný bod $\{a_1\}$, což je spor.

ii $\Rightarrow$ iii: Nechť $\{b_n\}$ je prostá podposloupnost a_n. Uvažujme případ, že b_n je omezená. Pak z Bolzano - Weierstrassovy věty existuje konvergentní podposloupnost c_n. Označme $C = \lim_{n\to\infty} c_n$. Pak alespoň jedna z množin $K = \{n, c_n > C\}$ a $Z = \{n, c_n < C\}$ je nekonečná (plyne z prostoty). BÚNO K je nekonečná. Pak z definice limity existuje prvek $\bar{c}_1$ takový, že $\bar{c}_1 - C < 1$. Dále musí existovat $\bar{c}_2$: $\bar{c}_2 - C < \frac{\bar{c}_1 - C}{2}$. Postupně zkonstruujeme posloupnost $\{\bar{c}_k\}$ tak, že $\bar{c}_{k+1} - C < \frac{\bar{c}_k - C}{2}$. Uvažovaná podposloupnost $\bar{c}_k$ je pak monotónní.

Nechť b_n není omezená. BÚNO b_n je neomezená shora. Pak existuje prvek $\bar{b}_1 > 1$. K němu existuje prvek $\bar{b}_2 > 2\bar{b}_1$. Dále konstruujme $\bar{b}_{n+1} > 2\bar{b}_n$. Hledaná monotónní podposloupnost je pak $\{\bar{b}_n\}$.

iii $\Rightarrow$ ii: ryze monotónní podposloupnost je zároveň prostá

ii $\Rightarrow$ iv: Nechť b_n je prostá podposloupnost. Pro ni platí, že $b_n \neq b_m$, kdykoli $m \neq n$. Pak množina hodnot posloupnosti a_n obsahuje množinu $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$, která ale musí být nekonečná (žádné dva prvky b_n nemohou být stejné).

iv $\Rightarrow$ ii: Uvažujme množinu hodnot a_n a nějakou její spočetnou podmnožinu A. Jelikož A je spočetná, lze najít bijekci $f : \mathbb{N} \to A$. Pak stačí položit $b_n = f(n)$.

iii $\Rightarrow$ iv: Plyne ze iii $\Rightarrow$ ii a ii $\Rightarrow$ iv.

iv $\Rightarrow$ iii: Plyne ze iv $\Rightarrow$ ii a ii $\Rightarrow$ iii.

2. Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce. (A předpokládáme, že následující výroky mají smysl.) Určete, které výroky jsou pravdivé

   (a) f i g jsou liché.

      i. $f+g$ je lichá
      Řešení: Ano. $(f+g)(x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + -g(x) = -(f+g)(x)$

      ii. fg je lichá
      Řešení: Ne, je sudá. $(fg)(-x) = -f(x) \cdot (-(g(x))) = f(x)g(x)$

      iii. $f(g)$ je lichá
      Řešení: Ano, $f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x))$

   (b) f je sudá, g je lichá.

      i. fg je sudá
      Řešení: Ne. Je lichá, $(fg)(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -(fg)(x)$

      ii. $f(g)$ je sudá
      Řešení: Ano. $f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$

      iii. $g(f)$ je sudá
      Řešení: Ano. $g(f(-x)) = g(f(x))$

      iv. $g+f$ je sudá
      Řešení: Ne. Např. x a x^2.

   (c) f i g jsou rostoucí

      i. $f+g$ jsou rostoucí
      Řešení: Ano. Nechť $s < t$. Pak $(f+g)(s) = f(s) + g(s) \leq f(t) + g(t)$.

      ii. fg jsou rostoucí
      Řešení: Ne. Např x a x.

      iii. $f(g)$ jsou rostoucí
      Řešení: Ano. Nechť $s < t$. Pak $g(s) \leq g(t)$. Tedy $f(g(s)) \leq f(g(t))$.

   (d) f je sudá

      i. je-li f rostoucí na $(0, \infty)$, je rostoucí i na $(-\infty, 0)$.
      Řešení: Ne. Např. x^2.

      ii. je-li f konvexní na $(0, \infty)$, je konvexní i na $(-\infty, 0)$.
      Řešení: Ano. Je-li f konvexní na $(0, \infty)$, tak pro $0 < s < t < u$ máme

      $$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

      Pro $-u < -t < -s < 0$ pak je

      $$\frac{f(-u) - f(-t)}{-u + t} = \frac{f(u) - f(t)}{-(u - t)} \leq -\frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{f(-t) - f(-s)}{-t + s}$$

3. Nechť f je nekonstantní periodická funkce na $\mathbb{R}$. Ukažte, že pak neexistuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

   Řešení: Nechť f je periodická s periodou p. Jelikož je nekonstantní, tak existují body a, b tak, že $f(a) \neq f(b)$. Pak pro různé dvě posloupnosti $\lim_{n\to\infty} f(a + pn) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a) \neq \lim_{n\to\infty} f(b + pn) = \lim_{n\to\infty} f(b) = f(b)$. Což je spor s Heineho větou.

4. Sestrojte nezápornou funkci f na intervalu $(0,1)$, nespojitou právě v bodech množiny $\{n^{-1};\ n \in \mathbb{N}\}$ tak, aby $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ a aby

$$\inf\{f(x); x \in (0,1)\} = 0, \qquad \sup\{f(x);\ x \in (0,1)\} = 1.$$

Řešení: Např. $f(1/n) = 1/n$, $f = 0$ jinde.

5. Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, pro kterou existují limity v nevlastních bodech a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Zjistěte, zda je pak již f omezená a zda nabývá v alespoň jednom bodě z $\mathbb{R}$ maxima nebo minima.

Řešení: Je-li funkce konstantní, pak již musí být nutně $f \equiv 0$.

Nechť f není konstantní. Pak existují intervaly $(-\infty, a)$ a (b, ∞) takové, že na nich $|f| < 2$ (z definice limity). Na intervalu $[a, b]$ je pak f omezená z věty o spojitosti a nabývání extrémů.

Nabývání extrémů. Jelikož f je nekonstantní, tak existuje x_0, takové, že $f(x_0) \neq 0$, BÚNO $f(x_0) > 0$. Pak z definice limity existují intervaly $(-\infty, a)$ a (b, ∞) takové, že na nich $f(x) < f(x_0)/2$.

Interval $[a, b]$ je omezený a uzavřený, tedy na něm funkce f nabývá maximum. Hodnota maxima $\max_{[a,b]} f(x) \le f(x_0)$. Mimo tento interval vyšší hodnota nemůže nastat, tedy jsme našli maximum.

6. Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$$

konstantní ve svém definičním oboru a řešení odůvodněte.

Řešení: Na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$ má funkce derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + 1} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Na každém intervalu zvlášť je tedy konstantní. Na celém D_f ale konstantní není, protože např. $f(-1) = 0 - \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, ale $\lim_{x\to\infty} f(x) = \arctan(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$.

7. Existují posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tak, že $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n$ neexistuje?

Řešení: Ano. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$.

8. Nechť je funkce konvexní na intervalu $[-1, 0]$ a také na $[0, 1]$? Musí být pak konvexní na $[-1, 1]$?

Řešení: Ne. Např. Sudé rozšíření funkce $x(x-1)$.

9. Najděte příklad funkce, pro kterou existují derivace na intervalech (a, c) a (c, b), dále existují a jsou si rovny $\lim_{x\to c-} f'(x) = \lim_{x\to c+} f'(x)$ a přitom neexistuje $f'(c)$.

Řešení: Např. $\operatorname{sgn} x$.

10. Nechť je funkce klesající na disjunktních intervalech I a J. Musí být klesající na $I \cup J$?

    Řešení: Ne. Např. $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

11. (a) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost celých čísel. Musí být limita celé číslo?

        Řešení: Ano. Aby byla posloupnost konvergentní, musí být od jistého členu konstantí. Tedy limita je celé číslo.

    (b) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?

        Řešení: Ne. Např. posloupnost $3;\ 3,1;\ 3,14; \ldots \to \pi$.

12. Napište příklad funkce, která není spojitá v bodě 7 a přitom $f'_+(7) = 2$.

    Řešení: Např.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 7, \\ 2x, & x \geq 7. \end{cases}$$

13. Nechť je funkce f spojitá v bodě 0. Musí existovat $f'_+(0)$? Dokažte, nebo sestrojte protipříklad.

    Řešení: Ne. Např. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$.

14. Najděte do sebe vnořené intervaly, které mají prázdný průnik. Mohou být uzavřené?

    Řešení: Např. $(0, \frac{1}{n})$ nebo (n, ∞).

    Nemohou, spor s Cantorovým principem vložených intervalů.

15. Nechť M je neomezená množina, nechť $\beta > 0$. Existuje pak $A \subset M$ nekonečná tak, že $\forall x, y \in A$, $x \neq y$ platí, že $|x - y| > \beta$?

    Řešení: Ano. BÚNO nechť M je neomezená shora. Pak uvažujme množiny $B_1 = [0, \beta)$, $B_2 = [\beta, 2\beta)$, $B_3 = [2\beta, 3\beta) \ldots$

    Pak $M \cap B_i \neq \emptyset$ pro nekonečné množství množin B_i (jinak by M byla omezená). Z každé takové B_i pak vybereme jeden prvek $x_i \in B_i$. Množina $A = \bigcup \{x_i\}$ pak má odpovídající vlastnosti.

16. Sestrojte konvergentní posloupnost takovou, že $\max\{a_n\}$ neexistuje.

    Řešení: Např. $a_n = -1/n$.

17. Najděte k dané neomezené posloupnosti a_n takovou posloupnost b_n, aby $a_n b_n \to 0$.

    Řešení: Pro členy $a_n = 0$ položme $b_n = 0$. Pro nenulové a_n uvažujme $b_n = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{n}$.

18. Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Musí platit $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$?

    Řešení:

    Ano - limita vybrané podposloupnosti.

    Ne, např. $\{q^n\}$, $|q| < 1$.

19. Stačí pro konvergenci posloupnosti, aby $|a_{n+1} - a_n| \xrightarrow{n \to \infty} 0$?

    Řešení: Ne. Např. pro $a_n = \log n$ máme $\lim_{n \to \infty} \log n = \infty$, ale $\log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} \to 0$.

20. Jestliže platí, že $a_{n+2} \geq a_n$, musí mít posloupnost limitu? Co když přidáme omezenost?

    Řešení: Ne. Např. $(-1)^n$.

21. Nechť $b \in \mathbb{R}^*$. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$.

    Řešení: Nechť $a \in \mathbb{R}$, pak volme $a_n = b^n$.

    Pro $a = \infty$ máme např. $a_n = n^n$. Pro $a = -\infty$ pak $a_n = (-1)^n n^n$.

    $[a^n,\ n^n,\ (-1)^n n^n]$

22. Sestrojte ryze monotónní funkci na intervalu $(0, 1)$, která má infimum hodnot rovné 0, supremum hodnot rovné 1 a je nespojitá právě v bodech $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

    Řešení:

    Konstruujeme postupně do 0 jako na obrázku: