24. cvičení - Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Najděte nebo vyvraťte všechny možné implikace mezi následujícími čtveřicemi výroků. (od prof. M. Huška: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~mhusek/exercise/)
   (a) Nechť $A \subset \mathbb{R}$
      i. A je nespočetná
      ii. A je nekonečná
      iii. A je neomezená
      iv. $\mathbb{R} \setminus A$ je spočetná
   (b) Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení
      i. f je surjekce
      ii. je-li X nekonečná, pak Y je nekonečná
      iii. pro každé $A \subset Y$ je $A = f(f^{-1}(A))$
      iv. je-li Y nekonečná, pak X je nekonečná
   (c) Nechť f je reálná funkce.
      i. existuje f' vlastní na $[0, 1]$
      ii. f je spojitá
      iii. f' je omezená na $[0, 1]$
      iv. f' je spojitá na $[0, 1]$
   (d) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost.
      i. $\{a_n\}$ není konstantní
      ii. $\{a_n\}$ má prostou podposloupnost
      iii. $\{a_n\}$ má ryze monotónní podposloupnost
      iv. množina hodnot $\{a_n\}$ je nekonečná
2. Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce. (A předpokládáme, že následující výroky mají smysl.) Určete, které výroky jsou pravdivé
   (a) f i g jsou liché.
      i. $f + g$ je lichá
      ii. fg je lichá
      iii. $f(g)$ je lichá
   (b) f je sudá, g je lichá.
      i. fg je sudá
      ii. $f(g)$ je sudá
      iii. $g(f)$ je sudá
      iv. $g + f$ je sudá
   (c) f i g jsou rostoucí
      i. $f + g$ jsou rostoucí
      ii. fg jsou rostoucí
      iii. $f(g)$ jsou rostoucí
   (d) f je sudá
      i. je-li f rostoucí na $(0, \infty)$, je rostoucí i na $(-\infty, 0)$.
      ii. je-li f konvexní na $(0, \infty)$, je konvexní i na $(-\infty, 0)$.
3. Nechť f je nekonstantní periodická funkce na $\mathbb{R}$. Ukažte, že pak neexistuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
4. Sestrojte nezápornou funkci f na intervalu $(0, 1)$, nespojitou právě v bodech množiny $\{n^{-1};\ n \in \mathbb{N}\}$ tak, aby $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ a aby

$$\inf\{f(x); x \in (0, 1)\} = 0, \qquad \sup\{f(x);\ x \in (0, 1)\} = 1.$$

5. Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, pro kterou existují limity v nevlastních bodech a
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
Zjistěte, zda je pak již f omezená a zda nabývá v alespoň jednom bodě z $\mathbb{R}$ maxima nebo minima.

6. Rozhodněte, zda je funkce
$$f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$$
konstantní ve svém definičním oboru a řešení odůvodněte.

7. Existují posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tak, že $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n$ neexistuje?

8. Nechť je funkce konvexní na intervalu $[-1, 0]$ a také na $[0, 1]$? Musí být pak konvexní na $[-1, 1]$?

9. Najděte příklad funkce, pro kterou existují derivace na intervalech (a, c) a (c, b), dále existují a jsou si rovny $\lim_{x\to c-} f'(x) = \lim_{x\to c+} f'(x)$ a přitom neexistuje $f'(c)$.

10. Nechť je funkce klesající na disjunktních intervalech I a J. Musí být klesající na $I \cup J$?

11. (a) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost celých čísel. Musí být limita celé číslo?
    (b) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?

12. Napište příklad funkce, která není spojitá v bodě 7 a přitom $f'_+(7) = 2$.

13. Nechť je funkce f spojitá v bodě 0. Musí existovat $f'_+(0)$? Dokažte, nebo sestrojte protipříklad.

14. Najděte do sebe vnořené intervaly, které mají prázdný průnik. Mohou být uzavřené?

15. Nechť M je neomezená množina, nechť $\beta > 0$. Existuje pak $A \subset M$ nekonečná tak, že $\forall x, y \in A$, $x \neq y$ platí, že $|x - y| > \beta$?

16. Sestrojte konvergentní posloupnost takovou, že $\max\{a_n\}$ neexistuje.

17. Najděte k dané neomezené posloupnosti a_n takovou posloupnost b_n, aby $a_n b_n \to 0$.

18. Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Musí platit $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$?

19. Stačí pro konvergenci posloupnosti, aby $|a_{n+1} - a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$? [2b]

20. Jestliže platí, že $a_{n+2} \geq a_n$, musí mít posloupnost limitu? Co když přidáme omezenost?

21. Nechť $b \in \mathbb{R}^*$. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$.

22. Sestrojte ryze monotónní funkci na intervalu $(0, 1)$, která má infimum hodnot rovné 0, supremum hodnot rovné 1 a je nespojitá právě v bodech $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.