23. cvičení - L'Hospital + Heine 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity. Výpočet důkladně odůvodněte.

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}\right)}$

   Řešení: Označme $b_n = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}\right)}$ a $a_n = (-1)^n b_n$. Spočtěme $\lim_{n\to\infty} b_n$.

   Heine: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right)} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right)\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

   Z Heineho věty tedy i $\lim_{n\to\infty} b_n = -\frac{2}{\pi}$.

   Pro a_n pak máme: $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = b_{2n} = -\frac{2}{\pi}$ z věty o limitě vybrané posloupnosti. Podobně $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = b_{2n-1} = +\frac{2}{\pi}$.

   Dohromady $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje kvůli větě o jednoznačnosti limity.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\pi) n \left(\arctan\dfrac{n+1}{n} - \arctan\dfrac{n-1}{n}\right)$

   Řešení: Označme $b_n = n\left(\arctan\frac{n+1}{n} - \arctan\frac{n-1}{n}\right)$ $a_n = \cos(n\pi) b_n = (-1)^n b_n$.

   Pro b_n z Heineho: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}{x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{-1}{1+(1-x)^2} = 1.$$

   Z Heineho věty tedy i $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

   Pro a_n pak máme: $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = b_{2n} = 1$ z věty o limitě vybrané posloupnosti. Podobně $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = b_{2n-1} = -1$.

   Dohromady $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje kvůli větě o jednoznačnosti limity.

2. Spočtěte limity.

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\pi - 2\arctan n)\cot\left(\pi e^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{2}{\pi}$

   Řešení: Heine $x_n = n$, $x_n \to \infty$, $x_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

   $$\lim_{x\to\infty} (\pi - 2\arctan x)\cot\left(\pi e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\pi - 2\arctan x)}{\tan\left(\pi e^{\frac{1}{x}}\right)} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{1+x^2}}{\frac{1}{\cos^2\left(\pi e^{\frac{1}{x}}\right)}\pi e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}$$

   $$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} \cdot \frac{\cos^2\left(\pi e^{\frac{1}{x}}\right)}{\pi e^{\frac{1}{x}}} \overset{VOAL}{=} 2 \cdot \frac{(-1)^2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

   VOLSF: $f(y) = \cos y$, $g(x) = \pi e^{\frac{1}{x}}$, (S).

   VOLSF: $f(y) = e^y$, $g(x) = \frac{1}{x}$, (S).

(b) $\lim\limits_{x\to 1} (x\log(ex))^{\frac{1}{\sin(\pi x)}} = e^-2/\pi$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1} \exp\left[\frac{1}{\sin(\pi x)}\log(x\log(ex))\right]$$

Vnitřní limita:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(x\log(ex))}{\sin(\pi x)} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x\log(ex)}\cdot(\log(ex)+x\frac{1}{ex}e)}{\pi\cos(\pi x)} \overset{VOAL}{=} \frac{\frac{1}{1\cdot 1}(1+1)}{-\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

Dohromady

$$\lim_{x\to 1}\exp\left[\frac{1}{1-\sin(\pi x)}\log(x\log(ex))\right] = e^{-2/\pi}$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n - \sqrt[3]{e}}{\pi - \operatorname{arccot}(-n)} = -\dfrac{\sqrt[3]{e}}{18}$

Řešení: Heine $x_n = n$, $x_n\to\infty$, $x_n\neq\infty$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x-\sqrt[3]{e}}{\pi-\operatorname{arccot}(-x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x\log\left(1+\frac{1}{3x}\right)}-\sqrt[3]{e}}{\pi-\operatorname{arccot}(-x)}\\
&\overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x\log\left(1+\frac{1}{3x}\right)}\left(\log(1+\frac{1}{3x})+x\frac{1}{1+\frac{1}{3x}}\cdot\frac{-1}{3x^2}\right)}{\frac{-1}{1+x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x\left(\log(1+\frac{1}{3x})+x\frac{1}{1+\frac{1}{3x}}\cdot\frac{-1}{3x^2}\right)}{\frac{-1}{1+x^2}} \overset{VOAL}{=} \sqrt[3]{e}\cdot-\frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

Protože

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{3x})+\frac{-1}{3x+1}}{\frac{-1}{1+x^2}} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{3x}}\cdot\frac{-1}{3x^2}+\frac{3}{(3x+1)^2}}{\frac{2x}{(1+x^2)^2}} = \lim_{x\to\infty}-\frac{\left(1+x^2\right)^2}{2x^2\left(3x+1\right)^2} = -\frac{1}{18}$$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\left(\dfrac{\pi(n-1)}{2n}\right)\arcsin\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{2}{\pi}$

Řešení: Heine $x_n = n$, $x_n\to\infty$, $x_n\neq\infty$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty}\tan\left(\frac{\pi(x-1)}{2x}\right)\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{1+x}}\cdot\frac{\frac{1}{1+x}}{\cot\left(\frac{\pi(x-1)}{2x}\right)} \overset{VOAL}{=} 1\cdot 2 = 2$$

Pro druhou limitu máme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cot\left(\frac{\pi(x-1)}{2x}\right)} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{\frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi(x-1)}{2x}\right)}\cdot\frac{\pi}{2x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sin^2\left(\frac{\pi(x-1)}{2x}\right)}{\pi(1+x)^2} \overset{VOAL}{=} \frac{2\cdot 1}{\pi}$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)\log\left(e^{\pi n^2}-1\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Řešení: Heine $x_n = \frac{1}{2n^2}$, $x_n \to 0+$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0+} \arcsin(x) \log\left(e^{\frac{\pi}{2x}} - 1\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin x}{x} \cdot \frac{\log\left(e^{\frac{\pi}{2x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Druhá limita:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log\left(e^{\frac{\pi}{2x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2x}}-1} \cdot e^{\frac{\pi}{2x}} \cdot \frac{-\pi}{2x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2x}} - 1} \cdot e^{\frac{\pi}{2x}} \cdot \frac{\pi}{2} =$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{2x}}}{e^{\frac{\pi}{2x}}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{2x}}} = \frac{\pi}{2}$$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} (2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}))^{\frac{1}{\operatorname{arccot} x}} = e^{-1/4}$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\operatorname{arccot} x} \log(2\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}))} = e^{-1/4}$$

Vnitřní limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}))}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\log(2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}))}{x \operatorname{arccot} x} \overset{VOAL}{=} \frac{\frac{-1}{4}}{1}$$

Pro čitatele:

$$\lim_{x\to\infty} x\log(2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})) = \lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) - 1} \cdot x\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - 1\right) \overset{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{-1}{4}$$

Druhá limita:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2}\right) = \frac{-1}{4}$$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} \tan\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{\pi}$

Řešení: Heine $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{1 + \frac{1}{x}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{-\frac{\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2}x^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)} \overset{VOAL}{=} \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{2}{\pi}$$

Protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right) \cdot \frac{-\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

3. Ukažte, že funkce $\operatorname{sgn} x$ není derivací žádné funkce.

   Řešení: Předpokládejme, že existuje $f(x)$ taková, že $f'(x) = \operatorname{sgn} x$.

   Protože f má vlastní derivaci v každém bodě, tak je f spojitá na $\mathbb{R}$.

   Zároveň platí
   $$f(x) = \begin{cases} -x + K, & x \in (-\infty, 0), \\ x + L, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$
   kde $K, L \in \mathbb{R}$.

   Aby f byla spojitá, musí platit $K = L$, tedy $f(x) = |x| + K$. Ale $|x|$ nemá derivaci v 0, což je ve sporu s naším předpokladem.