23. cvičení - L'Hospital + Heine 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže navíc platí jedna z následujících podmínek

(a) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, nebo

(b) $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 2 (Heineova)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)
$$\lim_{x\to a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Příklady

1. Spočtěte limity. Výpočet důkladně odůvodněte.

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}\right)}$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi) n \left(\arctan\frac{n+1}{n} - \arctan\frac{n-1}{n}\right)$

2. Spočtěte limity.

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\pi - 2\arctan n)\cot\left(\pi e^{\frac{1}{n}}\right)$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x\log(ex))^{\frac{1}{1-\sin(\pi x)}}$

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n - \sqrt[3]{e}}{\pi - \operatorname{arccot}(-n)}$

   (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi(n-1)}{2n}\right)\arcsin\left(\frac{1}{n+1}\right)$

   (e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \arcsin\left(\frac{1}{2n^2}\right)\log\left(e^{\pi n^2} - 1\right)$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}))^{\frac{1}{\operatorname{arccot} x}}$

   (g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n}\tan\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$

3. Ukažte, že funkce $\operatorname{sgn} x$ není derivací žádné funkce.